

МАТЕМАТИКА 10



ISBN 985-12-1704-2



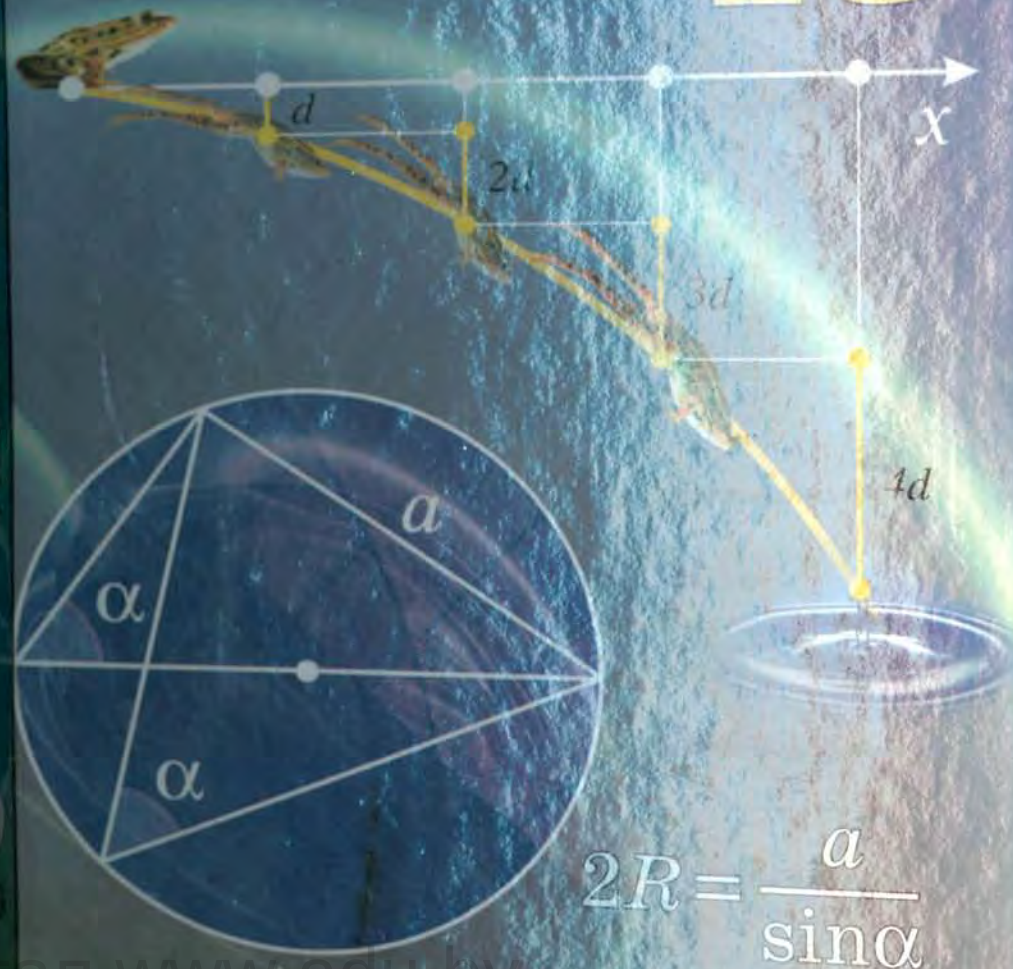
9 789851 217041

Адукацыйны партал www.adu.by

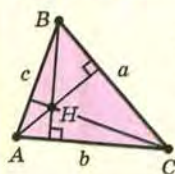
Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

10



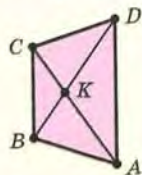
Треугольник



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

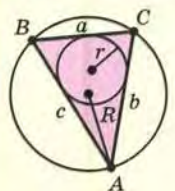
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Четырехугольник



Если $AD \parallel BC$,
то $\triangle AKD \sim \triangle CKB$
и $S_{ABK} = S_{DCK}$.
Если $S_{ABK} = S_{DCK}$,
то $ABCD$ — трапеция.

Окружность и треугольник

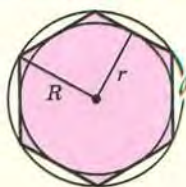


$$\frac{a}{\sin A} = 2R;$$

$$R = \frac{abc}{4S};$$

$$r = \frac{S}{p}.$$

Окружность и правильный многоугольник



$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n};$$

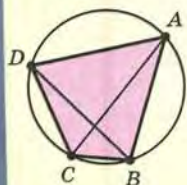
$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$a_3 = R\sqrt{3};$$

$$a_4 = R\sqrt{2};$$

$$a_6 = R.$$

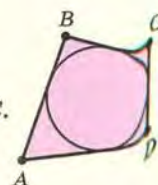
Окружность и четырехугольник



$$\angle A + \angle C = 180^\circ;$$

$$\angle ABD = \angle ACD;$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$



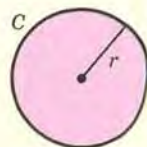
$$AB + CD = AD + BC.$$

Окружность и многоугольник



$$S = \frac{1}{2}Pr.$$

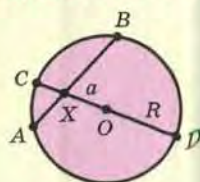
Круг



$$C = 2\pi r;$$

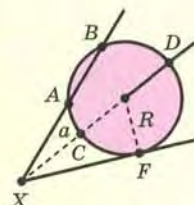
$$S = \pi r^2.$$

Окружность и прямая



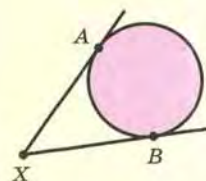
$$XA \cdot XB = XC \cdot XD =$$

$$= R^2 - a^2.$$



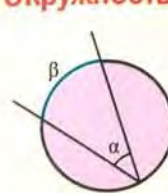
$$XA \cdot XB = XF^2 =$$

$$= a^2 - R^2.$$

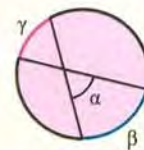


$$XA = XB.$$

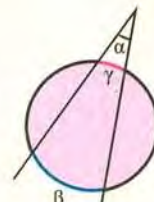
Окружность и угол



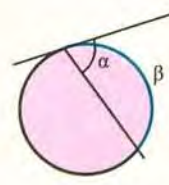
$$\alpha = \frac{1}{2}\beta$$



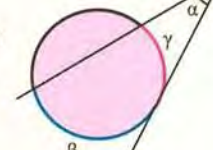
$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$



$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

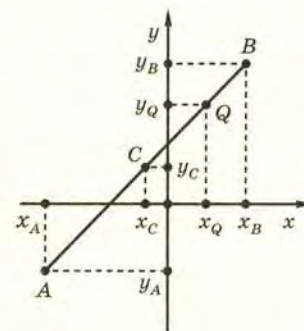
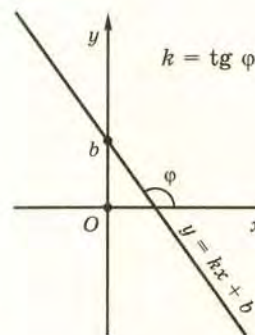


$$\alpha = \frac{1}{2}\beta$$



$$\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

Прямая



Если $k = \frac{AQ}{BQ}$, то

$$x_Q = \frac{x_A + kx_B}{1 + k} \text{ и } y_Q = \frac{y_A + ky_B}{1 + k}.$$

Если C — середина AB, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ и } y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Степенная функция с рациональным показателем

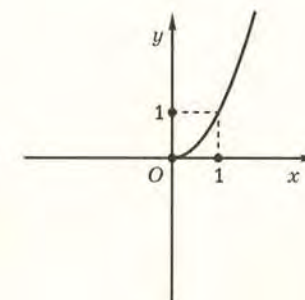
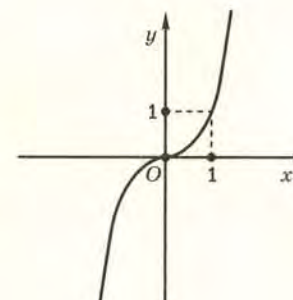
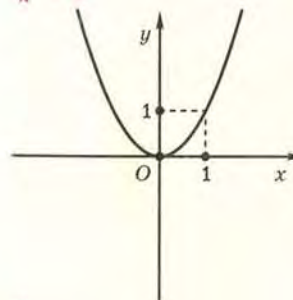
$$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

m — четное число,
 n — нечетное число.

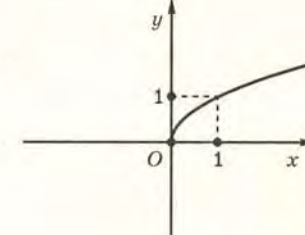
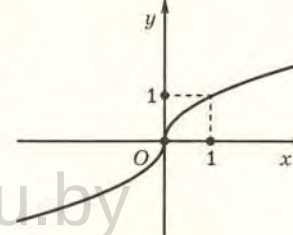
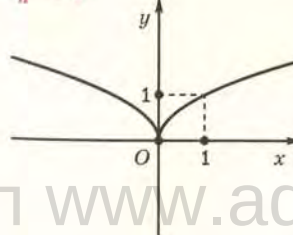
m — нечетное число,
 n — нечетное число.

m — нечетное число,
 n — четное число.

$$\frac{m}{n} > 1$$



$$\frac{m}{n} < 1$$



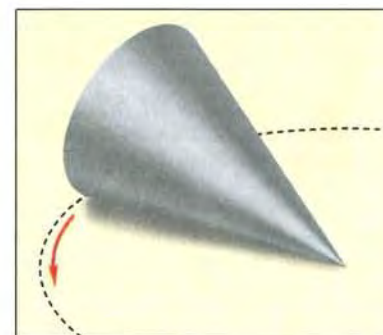
Л. А. Латотин Б. Д. Чеботаревский

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 10 класса учреждений,
обеспечивающих получение общего среднего
образования, с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь



Минск «Народная асвета» 2006

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721
Л27

Перевод с белорусского языка И. П. Ефременко

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики
Витебского государственного университета им. П. М. Машерова
(доктор пед. наук, профессор *К. О. Ананченко*);
учитель математики гимназии № 11 г. Минска *И. Г. Арефьева*

Латотин, Л. А.

Л27 Математика: учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский; пер. с белорус. яз. И. П. Ефременко. — 2-е изд. — Минск: Нар. асвета, 2006. — 416 с.: ил.
ISBN 985-12-1704-2.

УДК 51(075.3=161.1)
ББК 22.1я721

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для 10 класса учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования, с русским языком обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Обложка художника *А. С. Хотева*. Технические рисунки *А. Л. Латотина*. Художественный редактор *А. А. Вологович*. Технический редактор *М. И. Человодская*. Корректоры *Т. Н. Ведерникова, О. С. Козицкая, Д. Р. Лосик, З. Н. Гришели, В. С. Бабеня, А. В. Алешко*.

Подписано в печать с диапозитивов 15.11.2006. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 26+0,25 форз. Усл. кр.-отт. 105,5. Уч.-изд. л. 17,33+0,22 форз. Тираж 32 000 экз. Заказ 3552.

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.

ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004. 220004, Минск, проспект Победителей, 11.

ОАО «Полиграфкомбинат имени Я. Коласа». 220600, Минск, Красная, 23.

© Латотин Л. А., Чеботаревский Б. Д., 2006
© Ефременко И. П., перевод на русский язык, 2006
© Оформление. УП «Народная асвета», 2006

ISBN 985-12-1704-2

Дорогие друзья!

Десятый класс является в определенном смысле этапным в вашем обучении. Вас ожидают экзамены, после которых вы будете выбирать профиль дальнейшего обучения. Программой обучения предусматривается подытожить то, что изучалось ранее, дополнить ваши знания и обобщить их.

Это учебное пособие обеспечит изучение математики на базовом и повышенном уровнях. Материал, предназначенный для дополнительного изучения на повышенном уровне, помещен между специальными знаками ► ◄ или помещен в отдельные параграфы, отмеченные звездочкой. Материал последнего раздела должен дать вам представление о том, как устроена школьная математика. Значительное внимание при этом уделяется итоговому повторению.

Это учебное пособие организовано так же, как и в предыдущих классах. Каждый параграф начинается с обсуждения вопроса, обозначенного в его названии. Наиболее важное выделено специальными шрифтами. Новые понятия выделяются полужирным шрифтом. Правила и утверждения выделены полужирным курсивом, а понятия и факты, на которые стоит обратить внимание, но необязательно запоминать, — курсивом.

После объяснительного текста идут контрольные вопросы, отмеченные знаком ?. Они предназначены для проверки того, как вы усвоили содержание объяснительного текста. Если на тот или иной вопрос вы не смогли ответить, нужно вернуться к объяснительному тексту и с его помощью попробовать ответить на этот вопрос вновь.

Упражнения, идущие после контрольных вопросов, разделены на три группы.

Упражнения первой группы посвящены тем вопросам, которые обсуждались в объяснитель-

ном тексте. Они имеют в основном тренировочный характер, хотя среди них могут встретиться и более сложные.

Вторую группу после разделительной горизонтальной черты составляют разнообразные упражнения на повторение. При их выполнении вам нужно будет применить знания, полученные ранее, в том числе и в предыдущих классах.

Задачи третьей группы, идущие после трех разделительных звездочек, являются в чем-то нестандартными. Они потребуют творческих подходов, самостоятельности в рассуждениях. Вместе с тем для их решения у вас достаточно знаний.

Желаем вам успехов!

Авторы

Раздел I



СОЧЕТАНИЕ ОКРУЖНОСТИ С УГЛОМ, ПРЯМОЙ, МНОГОУГОЛЬНИКОМ

1. Окружность и угол

Рассмотрим взаимное расположение на плоскости окружности и угла, каждая сторона которого имеет с этой окружностью хотя бы одну общую точку.

В зависимости от расположения вершины угла по отношению к окружности возможны следующие случаи:

- вершина угла совпадает с центром окружности (рис. 1);
- вершина угла находится на окружности (рис. 2);
- вершина угла находится внутри круга (рис. 3);
- вершина угла находится вне круга (рис. 4).

Угол, вершина которого находится в центре круга, называется **центральный углом**.

На рисунке 1 угол AOB — центральный угол, так как его вершина O совпадает с центром окружности.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны имеют с окружностью общие точки, называется **вписанным углом**.

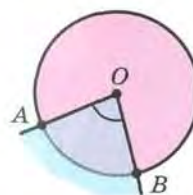


Рис. 1

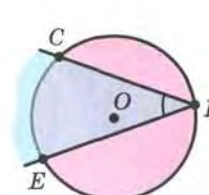


Рис. 2

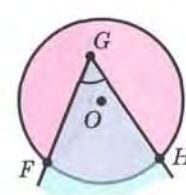


Рис. 3

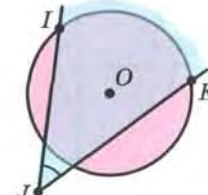


Рис. 4

На рисунке 2 угол CDE — вписанный угол, так как его вершина D лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность в точках C и E .

Угол CDE отсекает из окружности дугу CE . Говорят, что *вписанный угол CDE опирается на дугу CE* .

При измерении углов, связанных с окружностью, пользуются понятием градусной меры дуги. С градусным измерением дуг вы уже встречались в географии. Например, вам понятно, что означает утверждение «Город Минск находится под $53^{\circ}56'$ северной широты и под $27^{\circ}38'$ восточной долготы».

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Например, градусная мера четверти окружности равна 90° , полуокружности — 180° , трех четвертей окружности — 270° , всей окружности — 360° (рис. 5). На рисунке 6 градусная мера дуги UV , содержащей точку W , равна 67° , а дуги UV , содержащей точку T , равна 293° . Это записывают так:

$$\cup UWV = 67^{\circ}; \cup UTV = 293^{\circ}.$$

Теорема 1. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Вписанный угол по отношению к центру окружности может располагаться так, что этот центр лежит: а) на одной из сторон угла; б) внутри угла; в) вне угла.

а) Пусть центр Q окружности принадлежит стороне угла LMN (рис. 7). Докажем, что величина угла LMN равна половине градусной меры дуги LN .

Угол LQN как внешний угол треугольника LQM равен сумме углов LMQ и QLM . Но эти углы равны друг другу как углы при основании равнобедренного треугольника LMQ .

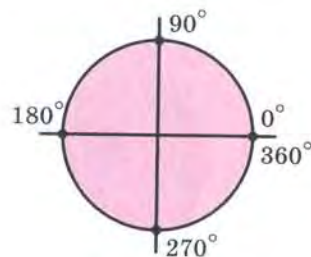


Рис. 5

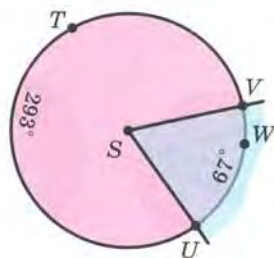


Рис. 6

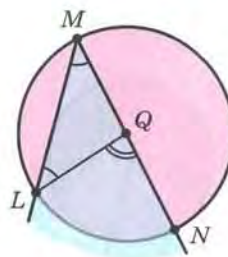


Рис. 7

Значит, $\angle LQN = 2 \angle LMN$, или $\angle LMN = \frac{1}{2} \angle LQN$. Поскольку градусные меры центрального угла LQN и дуги LN равны, то градусная мера в два раза меньшего вписанного угла равна половине градусной меры дуги LN : $\angle LMN = \frac{1}{2} \cup LN$.

б) Пусть центр Q окружности лежит внутри угла LMN (рис. 8). Докажем, что величина угла LMN равна половине градусной меры дуги LN .

Проведем диаметр MP . Тогда луч MP разобьет угол LMN на два угла LMP и PMN , в каждом из которых одна сторона проходит через центр. Используя доказанное в а), получим:

$$\begin{aligned} \angle LMN &= \angle LMP + \angle PMN = \frac{1}{2} \cup LP + \frac{1}{2} \cup PN = \\ &= \frac{1}{2} (\cup LP + \cup PN) = \frac{1}{2} \cup LN. \end{aligned}$$

Получили, что, как и в предыдущем случае, градусная мера угла LMN равна половине градусной меры дуги LN .

в) Пусть центр Q окружности лежит вне угла LMN (рис. 9). Докажем, что величина угла LMN и в этом случае равна половине градусной меры дуги LN .

Проведем диаметр MP . Тогда угол LMN равен разности углов LMP и NMP , в каждом из которых одна сторона проходит через центр. Используем доказанное в а) и получим:

$$\begin{aligned} \angle LMN &= \angle LMP - \angle NMP = \frac{1}{2} \cup LP - \frac{1}{2} \cup NP = \\ &= \frac{1}{2} (\cup LP - \cup NP) = \frac{1}{2} \cup LN. \end{aligned}$$

Получили, что и в этом случае градусная мера угла LMN равна половине градусной меры дуги LN .

Таким образом, градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую этот угол опирается.

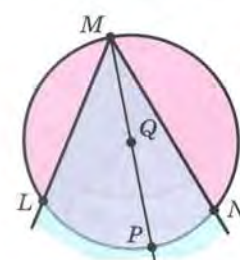


Рис. 8

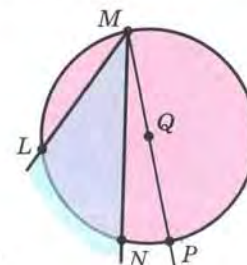


Рис. 9

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

► **Теорема 2.** Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному.

Доказательство. Пусть вершина M угла AMB находится внутри круга, его стороны пересекают окружность в точках A и B , а продолжения этих сторон — в точках A_1 и B_1 (рис. 10). Докажем, что $\angle AMB = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup A_1B_1)$.

Угол AMB — внешний угол треугольника AMB_1 . Поэтому $\angle AMB = \angle AB_1M + \angle MAB_1$. В соответствии с теоремой 1 можно утверждать, что $\angle AB_1M = \frac{1}{2} \cup AB$, а $\angle MAB_1 = \frac{1}{2} \cup A_1B_1$. Поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup AB + \frac{1}{2} \cup A_1B_1 = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup A_1B_1)$.

Теорема 3. Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол высекает из окружности.

Доказательство. Пусть вершина K угла MKN находится вне круга, его сторона KM пересекает окружность в точках M и M_1 , а сторона KN — в точках N и N_1 (рис. 11). Докажем, что $\angle MKN = \frac{1}{2} (\cup MN - \cup M_1N_1)$.

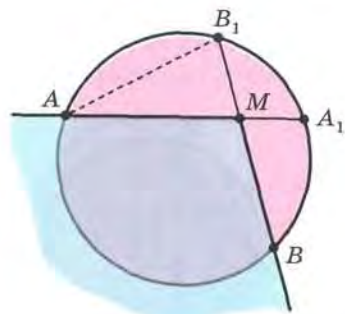


Рис. 10

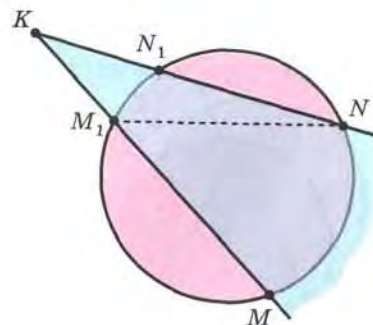


Рис. 11

Угол MM_1N — внешний угол треугольника NKM_1 . Поэтому $\angle MM_1N = \angle M_1KN + \angle M_1NK$. Значит, $\angle M_1KN = \angle MM_1N - \angle M_1NK$, или $\angle MKN = \angle MM_1N - \angle M_1NK$. В соответствии с теоремой 1 истинны утверждения $\angle MM_1N = \frac{1}{2} \cup MN$ и $\angle M_1NK = \frac{1}{2} \cup M_1N_1$. Поэтому $\angle MKN = \frac{1}{2} \cup MN - \frac{1}{2} \cup M_1N_1 = \frac{1}{2} (\cup MN - \cup M_1N_1)$. ◀



1. Какой угол называют центральным углом; вписанным углом?
2. Что называется градусной мерой дуги окружности?
3. Сформулируйте утверждение об измерении вписанного угла.
4. Какова величина угла, опирающегося на диаметр окружности?
5. Какое свойство имеют вписанные углы, опирающиеся на одну дугу?
6. Сформулируйте утверждение об измерении угла с вершиной внутри круга.
7. Сформулируйте утверждение об измерении угла с вершиной вне круга.

1. Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку X . Постройте дугу XY этой окружности, градусная мера которой равна:

- | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| а) 90° ; | в) 35° ; | д) 180° ; | ж) 290° ; |
| б) 60° ; | г) 140° ; | е) 200° ; | з) 345° . |

2. Дуги AB и CD окружности с центром O равны. Точка N — внутренняя точка дуги CD , а точка окружности P не принадлежит этой дуге. Градусная мера дуги AB равна 100° . Найдите градусные меры дуг CND и CPD .

3. Найдите с точностью до миллиметра длину дуги окружности с радиусом 10 см, градусная мера которой равна:

- | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| а) 90° ; | в) 75° ; | д) 180° ; | ж) 330° ; |
| б) 30° ; | г) 150° ; | е) 225° ; | з) 355° . |

4. Найдите с точностью до градуса градусную меру дуги окружности с радиусом 15 м, длина которой равна:

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| а) 5 м; | в) 32 м; | д) 60 м; | ж) 89 м; |
| б) 15 м; | г) 47 м; | е) 71 м; | з) 94 м. |

5. Отрезки AB и CD — взаимно перпендикулярные диаметры окружности с центром O . Найдите градусную меру

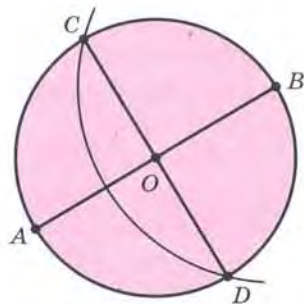


Рис. 12

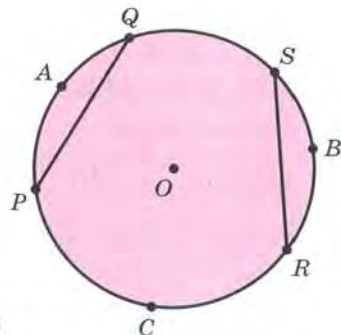


Рис. 13

дуги CD окружности, центром которой является точка B (рис. 12).

6. Дуги PQ и RS окружности с центром O равны. Точка A — внутренняя точка дуги PQ , точка B — внутренняя точка дуги RS , а точка C не принадлежит ни одной из этих дуг (рис. 13). Докажите, что:

- а) хорда PQ равна хорде RS , а дуга PCQ равна дуге RCS ;
- б) дуга PQS равна дуге RSQ , а дуга PCS равна дуге RCQ .

7. Найдите вписанный угол DFH , учитывая, что дуга DH , на которую он опирается, равна:

- а) 38° ; в) 90° ; д) 180° ; ж) $77^\circ 16'$;
- б) 64° ; г) 149° ; е) 277° ; з) $217^\circ 57'$.

8. Найдите угол AKB или дугу AB по сведениям, приведенным на рисунке:

- а) 14; б) 15; в) 16; г) 17.

9. Точки U и V выделяют из окружности дугу в 150° , а точка W разделяет другую дугу на части UW и VW , которые относятся как 3 : 4. Найдите углы треугольника UVW .

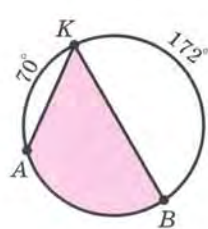


Рис. 14

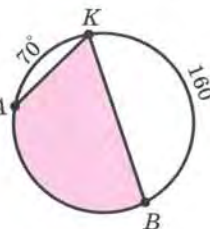


Рис. 15

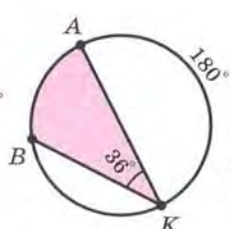


Рис. 16

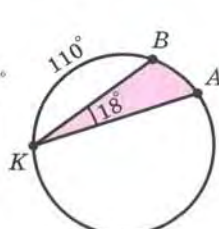


Рис. 17

10. Точки A, M, B, N расположены по окружности в указанном порядке. Докажите, что сумма углов AMB и ANB не зависит от положения точек M и N на тех дугах, на которых они находятся.

11. Прямые AB и CD пересекаются в точке K внутри круга с центром O и пересекают окружность в точках A, B, C, D , при этом углы AKC и AKD равны α и β соответственно, а дуги AC, CB, BD, DA — $\varepsilon, \gamma, \omega, \delta$ соответственно (рис. 18). Найдите:

- а) α, β, ω , если $\gamma = 40^\circ, \delta = 170^\circ, \varepsilon = 85^\circ$;
- б) $\alpha, \beta, \varepsilon$, если $\gamma = 40^\circ, \delta = 170^\circ, \omega = 85^\circ$;
- в) α, δ, ω , если $\gamma = 36^\circ, \beta = 130^\circ, \varepsilon = 70^\circ$;
- г) β, γ, ω , если $\varepsilon = 55^\circ, \alpha = 80^\circ, \delta = 160^\circ$;
- д) $\beta, \delta, \varepsilon$, если $\omega = 100^\circ, \alpha = 50^\circ, \gamma = 30^\circ$;
- е) $\beta, \gamma, \varepsilon$, если $\delta = 98^\circ, \alpha = 64^\circ, \omega = 102^\circ$.

12. Два луча, выходящие из точки P , пересекают окружность — один в точках R и Q , другой — в точках T и S (рис. 19), при этом угол QPS равен α , а дуги RT, TS, SQ, QR — $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ соответственно. Найдите:

- а) α, ε , если $\beta = 20^\circ, \delta = 80^\circ, \gamma = 65^\circ$;
- б) δ, ε , если $\alpha = 30^\circ, \beta = 34^\circ, \gamma = 70^\circ$;
- в) β, ε , если $\alpha = 18^\circ, \delta = 86^\circ, \gamma = 58^\circ$;
- г) α, δ , если $\gamma = 60^\circ, \varepsilon = 115^\circ, \beta = 85^\circ$.

13. Два луча, выходящие из одной точки, отсекают из окружности две дуги величиной 62° и 162° . Найдите угол между лучами и две другие дуги окружности, учитывая, что одна из них на 10° меньше другой.

14. Два луча, образующие угол величиной 46° , отсекают из окружности две дуги, большая из которых равна 132° . Найдите меньшую дугу и две другие дуги окружности, учитывая, что они относятся как 1 : 3.

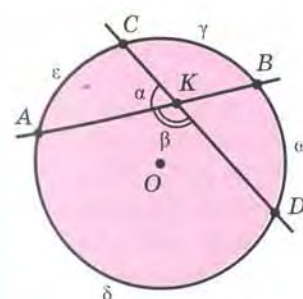


Рис. 18

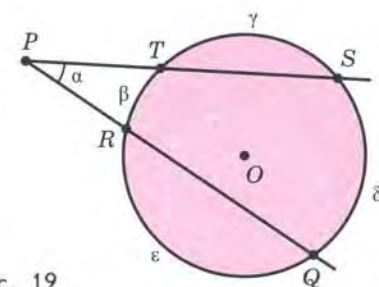


Рис. 19

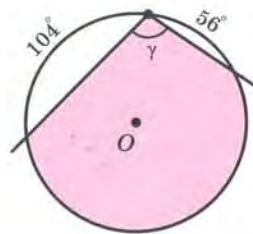


Рис. 20

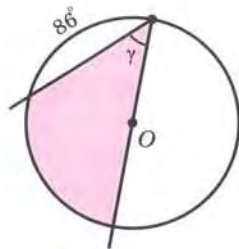


Рис. 21

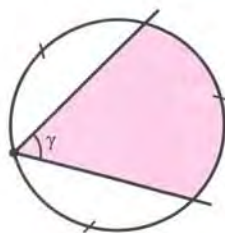


Рис. 22

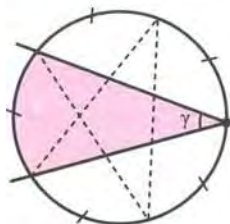


Рис. 23

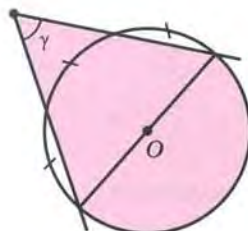


Рис. 24

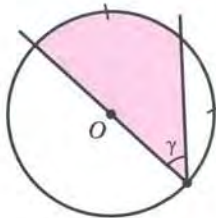


Рис. 25

15. Найдите угол γ по сведениям, приведенным на рисунке:

- а) 20; б) 21; в) 22; г) 23; д) 24; е) 25.

16. Установите, верно ли утверждение:

- а) равные хорды одной окружности стягивают равные дуги;
б) равные дуги одной окружности стягиваются равными хордами.

17. Найдите градусные меры дуг MQN и MBN , учитывая, что центр A первой из этих дуг лежит на окружности, которой принадлежит вторая дуга, а центр второй дуги принадлежит первой дуге (рис. 26).

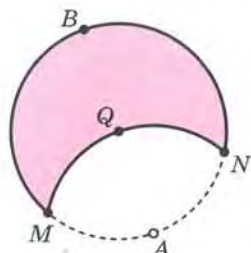


Рис. 26

18. Точка C делит пополам полуокружность AB , O — середина отрезка AB , X — точка луча OC . Определите:

- а) положение точки X , учитывая, что прямая AX делит пополам дугу BC ;
б) градусные меры дуг AL и BL , где L — точка пересечения прямой AX с полуокружностью и угол OXA равен α .

19. Точка M находится в плоскости круга с диаметром AB . Докажите что угол AMB является:

- а) острым, если точка M лежит вне круга;
б) прямым, если точка M лежит на окружности;
в) тупым, если точка M лежит внутри круга, но не на диаметре AB .

20. Точка C находится на окружности с диаметром AB , а точка D — ее проекция на AB . Пусть длины отрезков AB , BC , CA , CD , AD , BD и радиус окружности соответственно равны c , a , b , h , c_1 , c_2 , r . Выразите переменные:

- а) c , h , c_1 , c_2 , r через переменные a и b ;
б) b , c , c_1 , c_2 , r через переменные a и h ;
в) b , c , h , c_2 , r через переменные a и c_1 ;
г) b , c , h , c_1 , c_2 через переменные a и r ;
д) a , c , h , c_2 , r через переменные b и c_1 ;
е) a , c , h , c_1 , c_2 через переменные b и r ;
ж) a , b , c_1 , c_2 , r через переменные c и h ;
з) a , b , h , c_1 , r через переменные c и c_2 ;
и) a , b , h , c_1 , c_2 через переменные c и r ;
к) a , b , c , c_1 , r через переменные h и c_2 ;
л) a , b , c , h , c_2 через переменные c_1 и r .

21. Хорда AB длиной l и перпендикулярный ей диаметр MN круга с центром O пересекаются в точке K . Найдите радиус этого круга, учитывая, что отрезок NK :

- а) составляет четверть диаметра;
б) равен m .

22. На основании MN равнобедренного треугольника MKN как на диаметре построена полуокружность, пересекающая боковые стороны MK и NK в точках A и B соответственно. Установите:

- а) взаимное расположение прямых MN и AB ;
б) отношение площадей четырехугольника $MABN$ и треугольника MKN , учитывая, что угол MKN равен α ;
в) величину угла MKN , при котором площадь четырехугольника $MABN$ составляет половину площади треугольника MKN ;
г) градусные меры дуг MA , AB , BN , учитывая, что угол MKN равен α ;
д) величину угла MKN , при котором дуги MA , AB , BN равны.

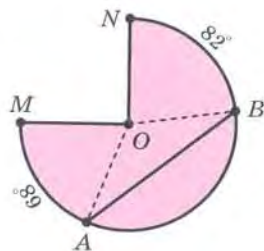


Рис. 27

23. Точки A и B дуги MN в три четверти окружности с центром O и радиусом 24 см выбраны так, что дуга MA равна 68° , а дуга NB — 82° (рис. 27). Найдите:

- дугу AB ;
- хорду AB .

24. Точки F и G на полуокружности DE с центром Q и радиусом 18 м выбраны так, что дуга DF равна 41° , а дуга EG — 17° . Найдите:

- дугу FG ;
- хорду FG с точностью до дециметра.

25. Докажите, что дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.

26. По ребру одной монеты катится край другой такой же монеты. Найдите, на какой угол повернулась вторая монета, учитывая, что она прокатилась по дуге α .

27. Дан сегмент. Как с помощью циркуля и линейки найти центр круга, которому принадлежит этот сегмент?

28. Как, пользуясь только циркулем, удвоить данный отрезок?

29. Найдите два числа, учитывая, что их среднее арифметическое равно 29, а среднее геометрическое — 21.

30. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} a + 2b = 12, \\ 2a^2 + b^2 = 33; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3m - 2n = 4, \\ 3m^2 - 2n^2 - 7n = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{1}{b-1} - \frac{c+1}{c+4} + \frac{5b-13}{(b-1)(c+4)} = 0, \\ 2b - 3c = 16; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{1}{u+4} - \frac{v-1}{v+2} + \frac{5u+12}{(u+4)(v+2)} = 0, \\ 4u - 3v + 10 = 0. \end{cases}$$

31. Постройте график функции:

$$\text{а) } S = 4a^2 - 3a + 4;$$

$$\text{б) } y = \frac{4}{t}.$$

32. Бобрица, Лядно, Мухно, Щибот — озера в Лепельском районе (рис. 28) — вместе имеют площадь 383 га. Если увеличить на 6 га площадь Лядно, уменьшить на 6 га площадь Щибота и на 9 га площадь Мухно, а площадь Бобрицы оставить без изменения, то полученные площади можно представить квадратами, стороны которых удовлетворяют следующим условиям: по сравнению со стороной квадрата площади Мухно сторона квадрата площади Лядно на 100 м больше, сторона квадрата площади Щибота на 100 м меньше, а сторона квадрата площади Бобрицы — в 2 раза и еще на 100 м больше (рис. 29). Найдите площади этих озер.

33. Бобрица, Лядно, Мухно, Щибот — озера в Лепельском районе (см. рис. 28) — вместе имеют площадь водосбора в 4253 га. Если увеличить площадь водосбора Лядно на 24 га, площадь водосбора Мухно на 13 га и уменьшить площадь водосбора Бобрицы на 30 га, площадь водосбора Щибота на 14 га, то полученные площади можно представить квадратами, стороны которых удовлетворяют следующим условиям: по сравнению со стороной квадрата площади водосбора Щибота сторона квадрата площади водосбора Лядно больше в 2 раза, сторона квадрата площади водосбора Бобрицы больше в 2 раза и еще на 200 м, сторона квадрата площади водосбора



Рис. 28



Рис. 29

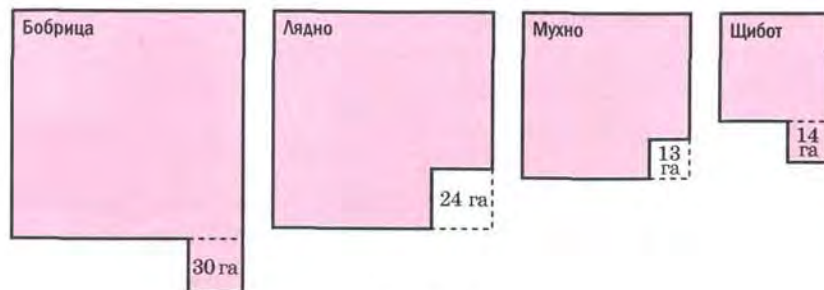


Рис. 30

Мухно на 1000 м больше (рис. 30). Найдите площади водосборов этих озер.

34. На рисунке 31 представлены соотношения между длинами береговых линий Бобрицы, Лядно, Мухно, Щибота. Составьте задачу и решите ее.

35. Вместе в озерах Лядно и Мухно 8,85 млн м³ воды, а в озерах Лядно и Бобрица — 23,45 млн м³ воды. Найдите, сколько воды в каждом из названных озер, учитывая, что среднее арифметическое объемов воды в озерах Мухно и Бобрица равно 11,8 млн м³.

36. Используя результаты решения задач 32 и 35, найдите средние глубины озер Бобрица, Лядно, Мухно и затем определите, сколько процентов это составляет от наибольших глубин этих озер, которые равны: 23 м для Бобрицы; 22 м для Лядно; 20 м для Мухно.

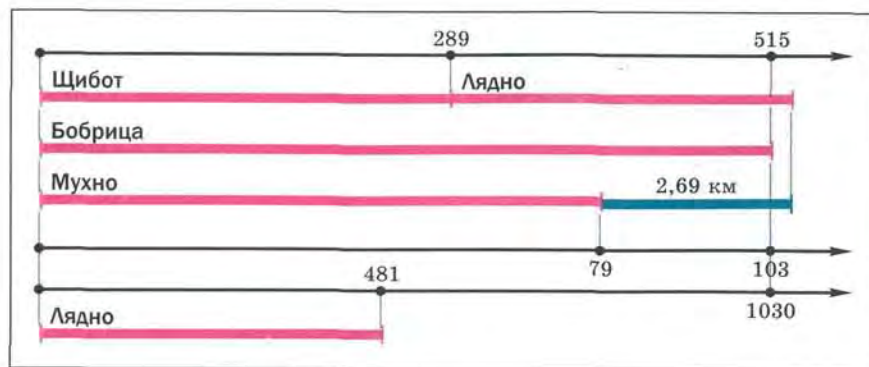


Рис. 31

37. Установите, каких натуральных чисел от 1 до 1 000 000 больше: тех, которые делятся на 11 и не делятся на 13, или тех, которые делятся на 13 и не делятся на 11.

38. Вершины треугольника находятся в вершинах квадратной сетки. Как с помощью одной линейки построить точку пересечения медиан этого треугольника?

39. Положительное число a удовлетворяет условию $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$. Найдите число a и докажите, что число $a^5 + \frac{1}{a^5}$ является натуральным.

2. Окружность и прямая

Рассмотрим взаимное расположение на плоскости окружности и прямой.

Если расстояние a от центра окружности до прямой больше радиуса r окружности, то окружность и прямая не имеют общих точек (рис. 32).

Если расстояние a от центра окружности до прямой меньше радиуса r окружности, то окружность и прямая имеют две общие точки (рис. 33).

Если расстояние a от центра окружности до прямой равно радиусу r окружности, то окружность и прямая имеют одну общую точку (рис. 34).

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется **секущей**.

Прямая l на рисунке 33 — секущая, а точки M_1 и M_2 — общие точки прямой и окружности.

Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется **касательной**, а эта точка — **точкой касания**.

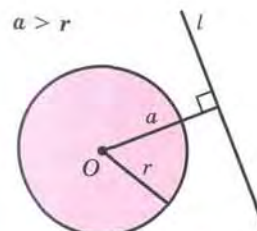


Рис. 32

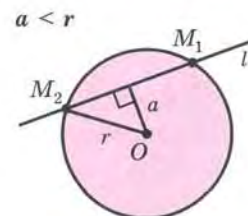


Рис. 33

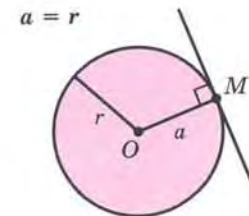


Рис. 34

Прямая l на рисунке 34 — касательная, а точка M — точка касания.

Теорема 4. Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство. Пусть прямая l касается в точке A окружности с центром Q (рис. 35). Тогда по определению касательной, точка A — единственная общая точка прямой и окружности. Докажем, что прямая l перпендикулярна радиусу QA , проведенному в точку касания.

Допустим, что прямая l не перпендикулярна радиусу QA . Построим перпендикуляр QP и от его основания P на прямой l отложим в другую сторону отрезок PB , равный отрезку PA . Прямоугольные треугольники QPA и QPB равны по двум катетам. Значит, равны гипотенузы QA и QB этих треугольников. Иными словами, отрезок QB , как и отрезок QA , равен радиусу окружности. А это означает, что точка B лежит на окружности. Поскольку по построению точка B лежит на прямой l , то прямая l и окружность имеют две общие точки A и B . Но это противоречит условию о том, что прямая l является касательной к окружности. Поэтому сделанное допущение следует отклонить и принять его отрицание: прямая l перпендикулярна радиусу QA , проведенному в точку касания.

Теорема 5. Если прямая проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной.

Доказательство. Пусть прямая k проходит через точку S окружности с центром R и перпендикулярна ее радиусу RS (рис. 36). Докажем, что прямая k является касательной к окружности.

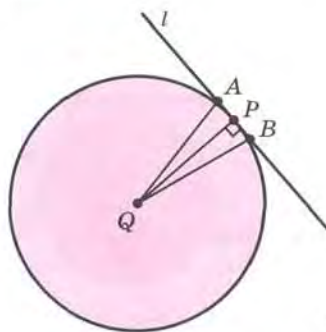


Рис. 35

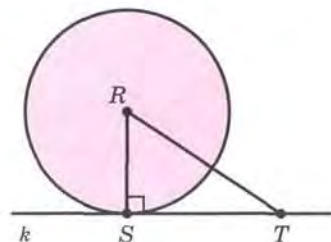
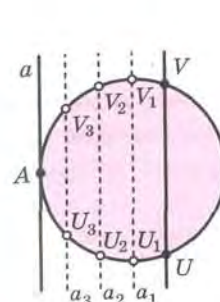


Рис. 36



$\angle ABO$, в два раза больше этого угла и равна $2 \cdot (90^\circ - \alpha)$. Поэтому $\angle AB = 180^\circ - \angle AD = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

Теорема 7. Произведение частей хорды, на которые она разделяется своей внутренней точкой, есть величина постоянная, равная $r^2 - a^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки.

Доказательство. Пусть дан круг с центром O и радиусом r , точка M внутри круга, отстоящая от центра O на a , через которую проведена хорда AB (рис. 41). Докажем, что $MA \cdot MB = r^2 - a^2$. Проведем через точку M диаметр PQ и соединим точки A и P , B и Q . Поскольку углы $\angle AMP$ и $\angle BMQ$ равны как вертикальные, углы $\angle PAM$ и $\angle BQM$ равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу PB , то треугольники $\triangle MAP$ и $\triangle MBQ$ подобны. Значит, $\frac{MA}{MP} = \frac{MQ}{MB}$, или $MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (r + a)(r - a) = r^2 - a^2$.

Теорема 8. Если секущая проходит через точку вне круга, то произведение отрезков, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, есть величина постоянная, равная $a^2 - r^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки.

Доказательство. Пусть дан круг с центром O и радиусом r , точка M вне круга, отстоящая от центра O на a , через которую проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и B (рис. 42). Докажем, что $MA \cdot MB = a^2 - r^2$. Через точку M и центр O круга проведем еще одну секущую, пересекающую окружность в точках P и Q . Соединим точки пересечения P и Q с точками B и A соответственно. Поскольку углы $\angle MAQ$ и $\angle MPB$ равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу QB , то треугольники $\triangle MAQ$ и $\triangle MPB$ подобны по второму признаку. Значит, $\frac{MA}{MQ} = \frac{MP}{MB}$, или $MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (a + r)(a - r) = a^2 - r^2$.

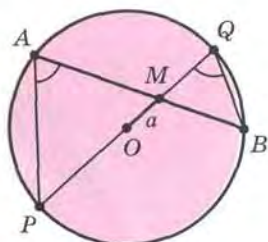


Рис. 41

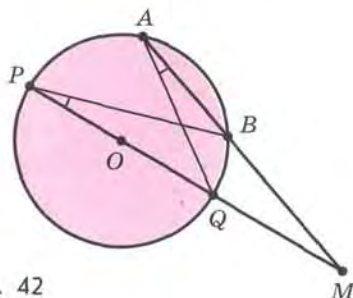


Рис. 42

Следствие 1. Если секущая и касательная проходят через данную точку вне окружности, то произведение отрезков секущей, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, равно квадрату отрезка касательной с концами в данной точке и точке касания.

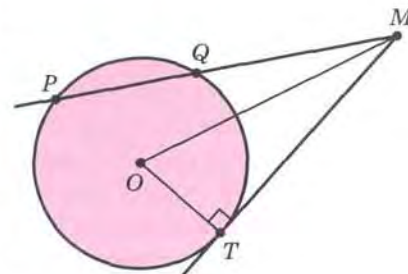


Рис. 43

Действительно, отрезок касательной MT с концами в данной точке M и в точке касания T является катетом прямоугольного треугольника $\triangle MTO$, гипотенуза OM которого соединяет центр окружности O с данной точкой M , а другой катет OT — центр окружности O с точкой касания T (рис. 43). Тогда $MT^2 = a^2 - r^2 = PM \cdot MQ$, где P и Q — точки пересечения с окружностью секущей, проведенной через точку M .

Следствие 2. Отрезки двух касательных, проведенных через одну точку и заключенные между этой точкой и точками касания, равны. ◀

- ?
1. Сколько общих точек могут иметь окружность и прямая?
 2. Какая прямая называется секущей; касательной?
 3. Какая точка называется точкой касания окружности и прямой?
 4. Сформулируйте свойство касательной к окружности.
 5. Сформулируйте признак касательной к окружности.
 6. Сформулируйте свойство касательных, проведенных к одной окружности через данную точку.
 7. Сформулируйте свойство угла между касательной и секущей, проведенной через точку касания.
 8. Сформулируйте свойство отрезков хорды, на которые она разделяется своей внутренней точкой.
 9. Сформулируйте свойство отрезков секущей, которые соединяют точку секущей вне круга с точками ее пересечения с окружностью.
 10. Сформулируйте свойство отрезков секущей и касательной, проведенных через одну точку вне круга и соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью и точкой касания.

40. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку на окружности.

41. Постройте окружность с данным радиусом, касающуюся данной прямой.

42. Прямая l касается окружности с центром O . Найдите расстояние от точки O до прямой l , учитывая, что диаметр окружности равен 12 см.

43. Найдите геометрическое место центров окружностей с данным радиусом, касающихся данной прямой.

44. Радиус окружности с центром O равен 3 см. Прямая a проходит через точку K и касается окружности в точке M . Найдите длину отрезка KM , учитывая, что $KO = 5$ см.

45. Докажите, что если прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B , то $\triangle MAO = \triangle MBO$.

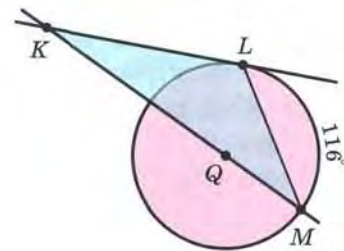


Рис. 44

46. Прямая KL касается окружности с центром Q в точке L , а луч KQ пересекает ее в точке M (рис. 44). Найдите углы треугольника LKM , учитывая, что дуга LM равна 116° .

47. Хорда MN видна из центра окружности под углом β . Найдите угол между этой хордой и касательной к окружности в точке M . По

результату решения сформулируйте соответствующее утверждение и обратное ему. Установите, верно ли обратное утверждение.

48. Через точки R и T окружности проведена секущая, через точки R и U этой окружности — еще одна секущая, которой принадлежит центр окружности. Касательная RS проведена так, что угол SRT острый. Докажите, что углы SRT и RUT равны.

49. Докажите, что секущая, параллельная касательной, отсекает от окружности такую дугу, которая точкой касания делится пополам.

50. Установите, под каким углом видна из центра круга с радиусом r хорда UV , учитывая, что она:

- а) отстоит от параллельной ей касательной на a , $a < r$;
- б) образует с проведенной через точку V касательной угол γ ;
- в) равна отрезкам касательных от их точки пересечения до точек касания U и V .

51. Докажите, что угол между секущей и касательной, проведенными из одной точки вне окружности, измеряется полуразностью дуг, заключенных между точкой касания и точками пересечения секущей с окружностью.

52. Докажите, что угол между касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности дуг, на которые разбивают окружность точки касания.

53. Через точку T , отстоящую на a от центра O окружности с радиусом r , проведены две прямые, касающиеся окружности в точках M и N , отстоящих друг от друга на $2b$, а угол MTN между касательными равен 2α (рис. 45). Найдите формулу, выражающую зависимость между переменными:

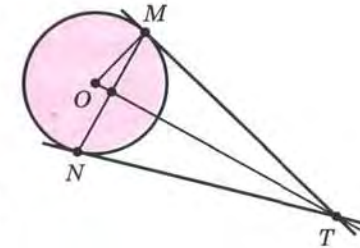


Рис. 45

- а) a, b, r ; б) a, b, α ; в) a, r, α ; г) b, r, α .

54. Окружность проходит через вершину A треугольника ABC , касается стороны BC в точке B , пересекает сторону AC в точке D , а ее центр расположен на стороне AC . Найдите углы:

- а) A и B , учитывая, что $\angle C = 20^\circ$;
- б) B и C , учитывая, что $\angle A = 30^\circ$;
- в) треугольника, учитывая, что $\sphericalangle AB = 130^\circ$.

55. Окружность, центр O которой расположен на стороне AC треугольника ABC , касается сторон AB и BC в точках M и N . Найдите углы и стороны треугольника ABC , учитывая, что $OM = MB = 6$ см.

56. Точки M, N и K выбраны на окружности так, что $\sphericalangle MN = 80^\circ$, $\sphericalangle MK = 140^\circ$. Найдите углы треугольника ABC , стороны которого касаются окружности в точках M, N и K .

57. Точки M, N и K выбраны на окружности так, что углы треугольника MNK равны $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$. Найдите углы треугольника ABC , стороны которого касаются окружности в точках M, N и K .

58. Найдите три таких точки данной окружности, чтобы касательные к окружности в этих точках ограничивали:

- а) равносторонний треугольник;
- б) равнобедренный треугольник;
- в) прямоугольный треугольник;
- г) треугольник с данными углами.

59. Хорды FG и HI одной окружности пересекаются в точке A . Найдите AI , учитывая, что:

- а) $FA = 50$, $GA = 20$, $HA = 25$;
- б) $FA = 160$, $GA = 90$, $HA = AI$;
- в) $FA = 2$, $GA = 5$, $HA - IA = 3$;
- г) $FA = 1,6$, $GA = 0,9$, $HA : AI = 5 : 7$.

60. Хорда AB окружности делит перпендикулярный ей диаметр MN на отрезки MC и NC , равные 8 и 18. Найдите AB .

61. Хорда MN образует с диаметром окружности угол α и разделяет его на части, равные m и n . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB . Вычисления проведите при $m = 14$, $n = 6$ и $\alpha = 30^\circ$.

62. Через точку C проведены касательная CD и секущая CF , D — точка касания, F и G — точки пересечения секущей с окружностью. Найдите хорду FG , учитывая, что:

- а) $CD = 10$, $CG = 5$;
- б) $CD = 6$, $CF = 18$.

63. Через точку K , расположенную на расстоянии a от центра окружности с радиусом r , равным 13 см, проведена хорда AB . Найдите ее длину, учитывая, что:

- а) $a = 8$ см, $AK - KB = 8$ см;
- б) $a = 11$ см, $AK - KB = 1$ см.

64. Через точку K , расположенную на расстоянии a от центра окружности с радиусом r , равным 13 см, проведена секущая AB , A и B — точки пересечения секущей с окружностью. Найдите KA и KB , учитывая, что:

- а) $a = 15$ см, $AB = 10$ см;
- б) $a = 17$ см, $AB = 2$ см.

65. Постройте окружность с данным радиусом, касающуюся данной окружности и данной прямой.

66. Отрезок M_1N_1 является проекцией диаметра MN окружности с центром O и радиусом R на касательную к этой окружности (рис. 46). Найдите границы изменения площади:

- а) четырехугольника MM_1N_1N ;
- б) части круга, ограниченной диаметром MN и отрезками MM_1 и NN_1 .

67. Найдите значение:

- а) углового коэффициента a и постройте график функции $y = ax - 3$, учитывая, что точка $M(2; 7)$ принадлежит этому графику;

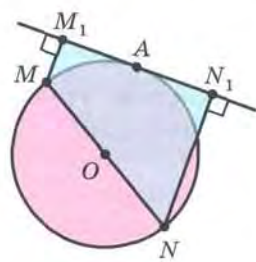


Рис. 46

б) параметра b и постройте график функции $y = 0,5x - b$, учитывая, что точка $N(-2; 1)$ принадлежит этому графику.

68. Установите, при каких значениях переменной значение квадратного трехчлена:

- а) $2a^2 - 7a + 13$ равно 5;
- б) $3b^2 + 5b - 10$ равно 12.

69. Найдите значения:

- а) старшего коэффициента a и второго коэффициента b и постройте график функции $y = ax^2 + bx + 4$, учитывая, что точки $R(-1; 9)$ и $S(1; 3)$ принадлежат этому графику;
- б) старшего коэффициента a и свободного члена c и постройте график функции $y = ax^2 + 2x + c$ учитывая, что точки $T(2; -9)$ и $U(-2; -17)$ принадлежат этому графику;
- в) второго коэффициента b и свободного члена c и постройте график функции $y = 3x^2 + bx + c$ учитывая, что точки $V(3; 16)$ и $W(-3; 40)$ принадлежат этому графику.

70. Начертите два произвольных отрезка. Найдите точку, равноотстоящую как от концов одного отрезка, так и от концов другого отрезка. Всегда ли:

- а) существует такая точка;
- б) такая точка единственна?

71. Найдите количество названий книг, изданных государственными издательствами в 2001, 2002, 2003 гг., учитывая, что увеличенное на 1 количество названий книг, изданных в 2002 г., относится к количеству названий книг, изданных в 2001 г., как $10 : 13$, к увеличенному на 5 количеству названий книг, изданных в 2003 г., как $15 : 14$, а в 2001 г. издано на 214 названий книг больше, чем в 2003 г.

72. По схеме, которая представлена на рисунке 47 и показывает тиражи книг, изданных государственными издательствами нашей страны, составьте задачу и решите ее.

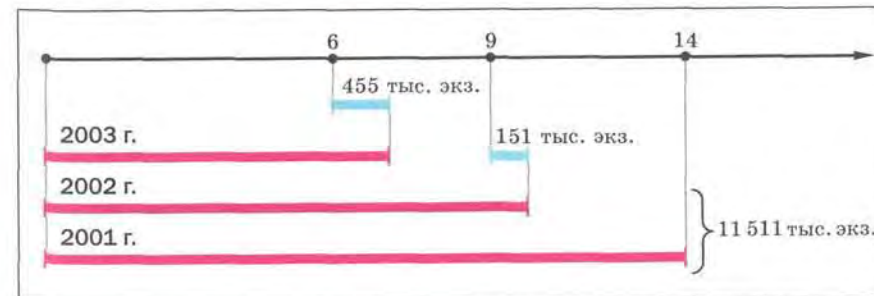


Рис. 47

73. Найдите количество названий книг, изданных негосударственными издательствами в 2001, 2002, 2003 гг., учитывая, что в среднем каждый год издавалось 5073 названий книг, в 2001 г. и 2002 г. в среднем 4753 названия, а в 2001 г. и 2003 г. — 5241 названия книг.

74. За 2001—2003 гг. негосударственными издательствами выпущено 119 093 тыс. экземпляров книг. Найдите тиражи книг, выпущенных в 2001, 2002, 2003 гг., учитывая, что по сравнению с предыдущим годом тираж в 2002 г. снизился на 6656 тыс. экземпляров, а в 2003 г. вырос на 5150 тыс. экземпляров.

* * *

75. На ребрах AA_1 и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что их расстояния от точки C равны 1,5 и 1,25 соответственно. Найдите длину отрезка MN , учитывая, что $AB = 1$.

76. Докажите, что если перед произвольно взятым числом написать цифру 3, а в его конце приписать цифру 7, то полученное число при делении на 37 никогда не даст исходного числа.

77. В квадрате, разделенном на 36 одинаковых клеток, часть клеток окрашена в черный цвет. За один ход разрешается изменить цвет любых трех соседних клеток, расположенных «уголком» (черный — на белый, а белый — на черный). Докажите, что через несколько таких ходов все клетки можно сделать белыми.

3. Окружность и треугольник

Мы исследовали взаимное расположение окружности с углом и прямой. Теперь рассмотрим сочетание окружности с многоугольником. Из возможных случаев взаимного расположения окружности и многоугольника рассмотрим те, когда окружность касается всех сторон многоугольника (рис. 48) или проходит через все его вершины (рис. 49). В первом случае говорят, что *окружность вписана в многоугольник*, или что *многоугольник описан около окружности*, во втором — что *окружность описана около многоугольника*, или что *многоугольник вписан в окружность*.

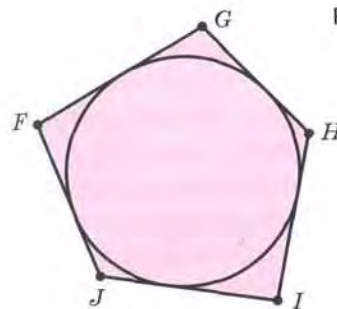


Рис. 48

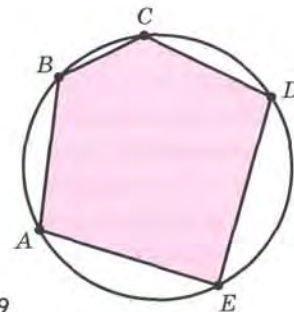


Рис. 49

Понятно, что в многоугольник можно вписать окружность, если найдется точка, равноотстоящая от всех его сторон (рис. 50), а около многоугольника можно описать окружность, если найдется точка, равноотстоящая от всех его вершин (рис. 51).

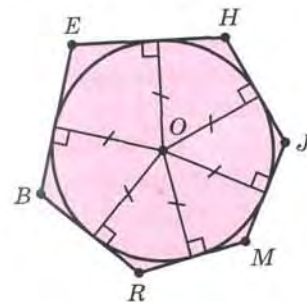


Рис. 50

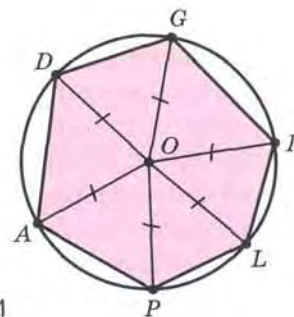


Рис. 51

Теорема 9. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

Доказательство. Пусть биссектрисы DD_1 и EE_1 треугольника DEF пересекаются в точке I (рис. 52).

Точка I , как точка биссектрисы DD_1 , равноудалена от лучей DE и DF , а значит, и от отрезков DE и DF . Эта же точка, как точка биссектрисы EE_1 , равноудалена от лучей ED и EF , а значит, и отрезков DE и EF . Значит, точка I равноудалена и от отрезков DF и EF , а значит, и от лучей FD и FE . Это означает, что она принадлежит биссектрисе FF_1 , иными словами, биссектриса FF_1

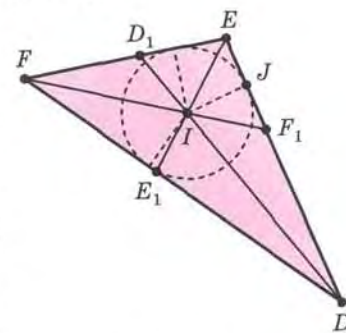


Рис. 52

проходит через точку I . Таким образом, все три биссектрисы DD_1 , EE_1 , FF_1 треугольника DEF пересекаются в одной точке I .

Поскольку точка I равноудалена от сторон DE , EF , DF треугольника DEF , то окружность с центром I и радиусом IJ , где J — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на сторону DE , касается всех трех сторон этого треугольника, т. е. является окружностью, вписанной в треугольник DEF .

Для нахождения радиуса r вписанной в треугольник окружности можно использовать его связь с площадью S треугольника и его полупериметром p :

$$S = pr. \quad (1)$$

Теорема 10. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности.*

Доказательство. Пусть прямые k и l — серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC соответственно (рис. 53). Если допустить, что прямые k и l не пересекаются, т. е. параллельны, то тогда должны быть параллельными и прямые AB и AC как прямые, перпендикулярные параллельным прямым: первая — прямой k , вторая — прямой l . Но прямые AB и AC пересекаются, так как на них лежат стороны треугольника.

Пусть O — точка пересечения прямых k и l . Точка O , как точка серединного перпендикуляра k , равноудалена от вершин A и B . Эта же точка, как точка серединного перпендикуляра l , равноудалена от вершин A и C . Значит, точка O равноудалена и от вершин B и C . Это означает, что она принад-

лежит серединному перпендикуляру m к стороне BC . Иными словами, серединный перпендикуляр к стороне BC проходит через точку O . Таким образом, все три серединных перпендикуляра k , l , m к сторонам треугольника пересекаются в одной точке O .

Поскольку точка O равноудалена от вершин A , B , C треугольника ABC , то окружность с центром O и радиусом OA проходит через все три

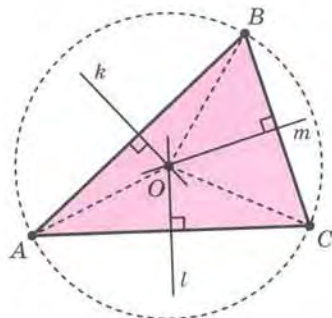


Рис. 53

эти вершины, т. е. является окружностью, описанной около треугольника ABC .

Мы нашли две точки треугольника — центр O описанной окружности и центр I вписанной окружности, — которые имеют общее свойство, именно в каждой из них пересекаются по три прямые, связанные с треугольником: в точке O — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника; в точке I — прямые, на которых лежат биссектрисы треугольника. Есть и другие точки с похожим свойством.

Теорема 11. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которой каждая из них делится в отношении 2 : 1, если считать от вершины.*

Доказательство. Пусть медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке G (рис. 54).

Треугольники GAB и GA_1B_1 подобны, так как поскольку средняя линия A_1B_1 параллельна стороне AB , то углы A_1AB и AA_1B_1 равны как накрест лежащие углы при этих параллельных, пересеченных прямой AA_1 , а углы AGB и A_1GB_1 равны как вертикальные. Значит, $\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$. Но по свойству

средней линии треугольника $\frac{AB}{A_1B_1} = 2 : 1$. Значит,

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = 2 : 1.$$

Пусть теперь G_1 — точка пересечения медиан CC_1 и BB_1 . По уже доказанному, точка G_1 пересечения этих медиан удовлетворяет условию $\frac{BG_1}{G_1B_1} = 2 : 1$. Учитывая, что $\frac{BG}{GB_1} = 2 : 1$, по-

лучим $\frac{BG_1}{G_1B_1} = \frac{BG}{GB_1}$. Это равенство означает, что точка G_1 совпадает с точкой G , другими словами, медиана CC_1 проходит через точку G . Таким образом, все три медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке G .

Точку G пересечения медиан треугольника называют *центром тяжести* треугольника. Это название связано с тем, что именно в этой точке находится центр тяжести однородной

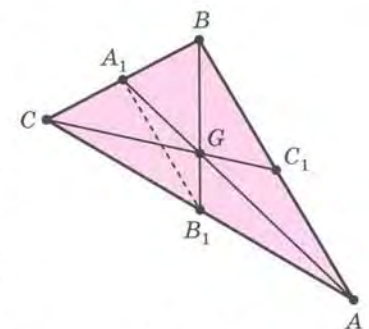


Рис. 54



Рис. 55

треугольной пластинки. Такая пластинка, горизонтально положенная центром тяжести на вертикальный стержень, находится в равновесии (рис. 55).

Теорема 12. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

► **Доказательство.** Пусть прямые AA_1 , CC_1 , EE_1 содержат высоты треугольника ACE (рис. 56). Докажем, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Пусть прямые, проведенные через вершины треугольника ACE параллельно его противоположным сторонам, пересекаются в точках A_2 , C_2 , E_2 . Вершины A , C , E данного треугольника в образованном треугольнике $A_2C_2E_2$ являются серединами сторон. Действительно, отрезки AC_2 и AE_2 оба равны отрезку EC как противоположные стороны параллелограммов $ECAC_2$ и ECE_2A соответственно, и поэтому равны друг другу. Так же отрезки CA_2 и CE_2 оба равны отрезку AE как противоположные стороны параллелограммов AEA_2C и AEE_2C_2 , а отрезки EA_2 и EC_2 оба равны отрезку AC как противоположные стороны параллелограммов ACA_2E и $ACEC_2$.

По условию прямые AA_1 , CC_1 , EE_1 перпендикулярны сторонам CE , EA , AC треугольника ACE . Тогда эти прямые перпендикулярны и сторонам C_2E_2 , E_2A_2 , A_2C_2 треугольника $A_2C_2E_2$, так как по построению отрезки C_2E_2 , E_2A_2 , A_2C_2 соответственно параллельны отрезкам CE , EA , AC . Это означает, что прямые AA_1 , CC_1 , EE_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2C_2E_2$. В соответствии с теоремой 10 прямые AA_1 , CC_1 , EE_1 пересекаются в одной точке. ◀

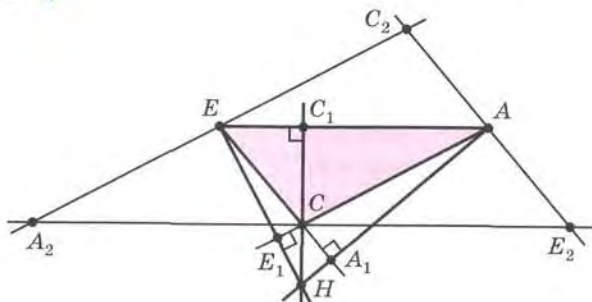


Рис. 56

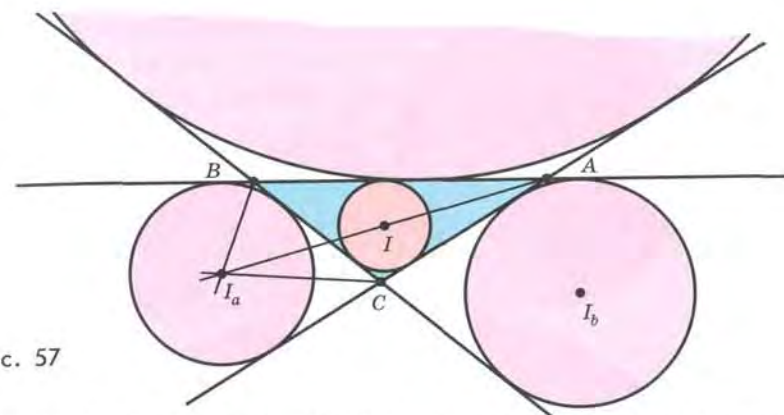


Рис. 57

Точку H пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, называют *ортоцентром* треугольника.

Точки O , I , G , H , удовлетворяющие условиям теорем 9, 10, 11, 12 соответственно, называют *замечательными точками* треугольника.

► Треугольник имеет и другие замечательные точки. Таковыми точками являются, например, точки I_a , I_b , I_c , пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника и биссектрисы третьего внутреннего угла. Эти точки являются центрами трех окружностей, каждая из которых касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (рис. 57). Такие окружности называются *вневписанными окружностями* треугольника.

Замечательные точки треугольника определенным образом связаны. Например, центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется *прямой Эйлера* (рис. 58). Прямой Эйлера при-

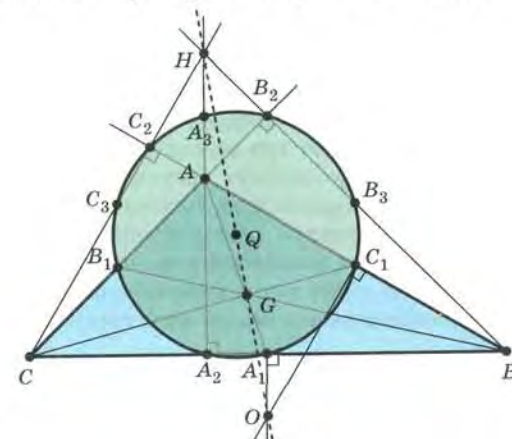


Рис. 58

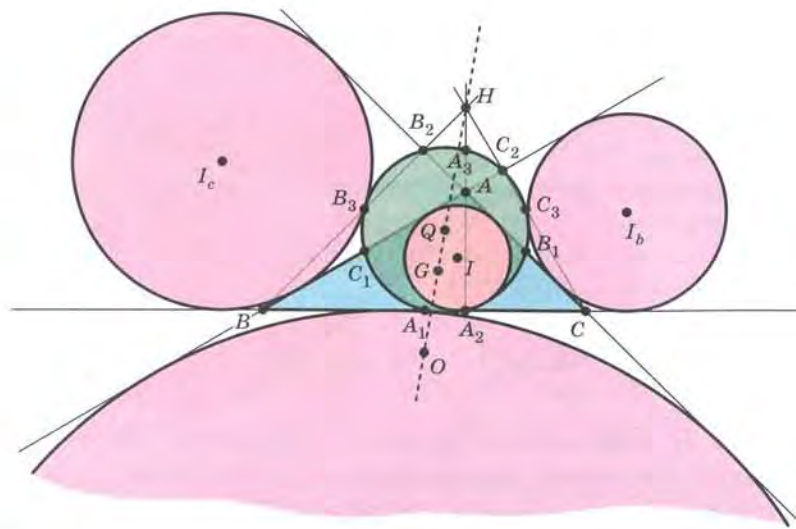


Рис. 59

надлежит еще одна интересная точка — центр Q окружности девяти точек, которая проходит через середины A_1, B_1, C_1 сторон треугольника ABC , основания A_2, B_2, C_2 его высот и середины A_3, B_3, C_3 отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами. Точка Q является серединой отрезка OH , а точка G делит этот отрезок в отношении $1 : 2$, если считать от точки O . Окружность девяти точек касается сразу четырех окружностей — вписанной и трех внеписанных (рис. 59). Мы затронули здесь только некоторые факты геометрии треугольника — этой простейшей геометрической фигуры, теория которой очень богатая и интересная. ◀

- ?
1. Какая окружность называется окружностью, вписанной в многоугольник; окружностью, описанной около многоугольника?
 2. Какой многоугольник называется многоугольником, описанным около окружности; многоугольником, вписанным в окружность?
 3. Какое свойство имеют три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника; три биссектрисы треугольника; три медианы треугольника; три прямых, содержащих высоты треугольника?
 4. Какая точка является центром описанной около треугольника окружности; центром вписанной в треугольник окружности?
 5. Какое свойство имеет точка пересечения медиан треугольника?
 6. Какая точка называется центроидом треугольника; ортоцентром треугольника?
 7. Какая окружность называется внеписанной окружностью треугольника?

78. На биссектрисе угла T , меньшего развернутого, выбрана точка A , и из нее опущены перпендикуляры AM и AN на стороны этого угла. Найдите угол между прямыми TA и MN .

79. Стороны угла B касаются окружности с центром O в точках N_1 и N_2 . Докажите, что прямые BO и N_1N_2 перпендикулярны.

80. Две окружности с общей касательной в точке C касаются каждой сторон угла D (рис. 60). Докажите, что центры этих окружностей принадлежат прямой CD .

81. Стороны угла K касаются окружности с центром Q в точках B_1 и B_2 . Найдите:

- а) KQ , учитывая, что угол K равен 60° , а радиус QB_1 — 10 см;
- б) радиус QB_1 , учитывая, что угол K равен 90° , а отрезок KQ — 16 см;
- в) угол K , учитывая, что радиус QB_1 равен 12 дм, а отрезок KQ — 15 дм;
- г) отрезок B_1B_2 , учитывая, что радиус QB_1 равен 7 м, а отрезок KQ — 25 м;
- д) угол K , учитывая, что радиус QB_1 равен 9 м, а отрезок B_1B_2 — $3\sqrt{3}$ м.

82. Биссектрисы внешних углов N и K треугольника MNK пересекаются в точке I (рис. 61). Докажите, что точка I является центром окружности, касающейся стороны NK и лучей MN и MK .

83. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите углы AOB , AOC и BOC , учитывая, что $\angle A = 50^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$.

84. Пусть биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что величина угла AOB зависит только от величины угла ACB .

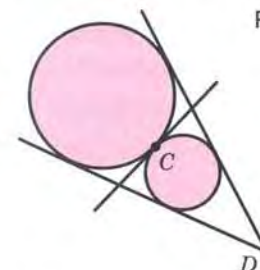


Рис. 60

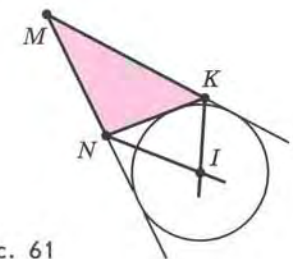


Рис. 61

85. Биссектрисы CC_1 и DD_1 треугольника BCD пересекаются в точке Q . Найдите угол CQD , учитывая, что $\angle CBD = 40^\circ$.

86. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O . Найдите угол AOC , учитывая, что $\angle ABC = 140^\circ$.

87. Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c , а сумма катетов — k .

88. Вписанная в треугольник PQR окружность касается его сторон PQ , QR , RP в точках A , B , C соответственно. Учитывая, что эти стороны соответственно равны 20, 24 и 10, найдите отрезки AP , AQ , BQ , BR , CR , CP .

89. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон в точках M , N , и K (рис. 62). Найдите длины отрезков AK , BM , CN , учитывая, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

90. Найдите основание равнобедренного треугольника, учитывая, что проведенная к нему высота делится центром вписанной в треугольник окружности в отношении 12 : 5, если считать от вершины, а боковая сторона равна 30.

91. Найдите периметр равнобедренного треугольника, боковая сторона которого точкой касания с вписанной в треугольник окружностью разделяется на отрезки 6 м и 8 м, если считать от основания.

92. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Найдите периметр треугольника, учитывая, что:

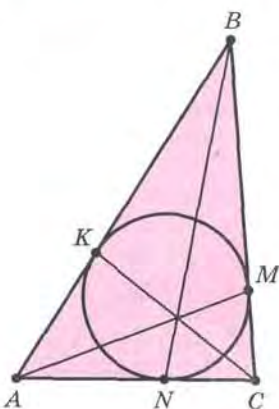


Рис. 62

- а) его гипотенуза равна 260 мм, а радиус вписанной окружности — 40 мм;
б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 50 мм и 120 мм.

93. Серединный перпендикуляр к стороне LM треугольника KLM пересекает сторону KL в точке B . Найдите:

- а) KL , учитывая, что $BK = 30$ мм и $BM = 72$ мм;
б) KB , учитывая, что $KL = 90$ см и $BM = 63$ см.

94. Серединные перпендикуляры к сторонам SR и ST треугольника RST пересекаются в точке E стороны RT (рис. 63). Докажите, что:

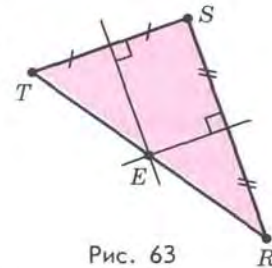


Рис. 63

- а) точка E — середина стороны RT ;
б) угол S равен сумме углов R и T ;
в) треугольник RST прямоугольный.

95. Серединный перпендикуляр к стороне TU равнобедренного треугольника с основанием TV пересекает сторону UV в точке W . Найдите сторону TV , учитывая, что сторона TU равна 30 м, а периметр треугольника TVW — 40 м.

96. Основание равнобедренного треугольника равно 16, а боковая сторона — 17. Найдите радиусы окружностей, вписанной в этот треугольник и описанной около него.

97. Постройте треугольник со сторонами 6,5 см, 7 см, 7,5 см, опишите около него окружность и измерьте радиус этой окружности.

98. Когда около треугольника ABC описали окружность, то оказалось, что сторона AB является диаметром этой окружности. Найдите углы треугольника, учитывая, что дуга:

- а) BC равна 140° ; б) AC равна 68° .

99. Найдите углы равнобедренного треугольника MNP с основанием MP , вписанного в окружность, учитывая, что дуга:

- а) MP равна 108° ; б) MN равна 130° .

100. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой его гипотенузы.

101. Найдите стороны прямоугольного треугольника, учитывая, что один из его острых углов равен β , а диаметр описанной около него окружности — d .

102. Найдите радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности, учитывая, что:

- а) его катеты равны 11 и 60;
б) один из углов равен 60° , а один из катетов — 10;
в) высота, проведенная к гипотенузе, равна 12, а тангенс одного из углов — 1,25.

103. Найдите сторону равностороннего треугольника, учитывая, что радиус описанной около него окружности равен 12.

104. Найдите:

- сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность с радиусом 1;
- радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1.

105. Найдите зависимость между радиусом R окружности и стороной a описанного около нее равностороннего треугольника.

106. Найдите диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в котором угол против основания равен 120° , а боковая сторона — 24.

107. Докажите, что центр описанной около треугольника окружности находится:

- внутри треугольника, если треугольник остроугольный;
- на его стороне, если треугольник прямоугольный;
- вне треугольника, если треугольник тупоугольный.

108. Установите вид треугольника, учитывая, что:

- центр вписанной окружности лежит на одной из его высот;
- центр описанной около него окружности лежит на высоте или на ее продолжении.

109. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , равным b , и боковой стороной AB , равной c , вписан в окружность с центром Q и радиусом r (рис. 64). Высота BT треугольника равна h , а высота UT сегмента AUC равна k . Докажите, что:

- $c^2 = 2rh$;
- $b^2 = 4hk$.

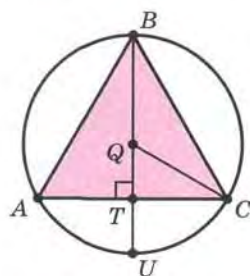


Рис. 64

110. Около разностороннего треугольника ABC , у которого стороны AB , BC , CA соответственно равны c , a , b , описана окружность с центром O . Сравните углы AOB , BOC , COA , учитывая, что $a < b < c$.

111. Восстановите равнобедренный треугольник по центру описанной около него окружности и его:

- основанию;
- боковой стороне.

112. Докажите, что треугольник, у которого совпадают центры описанной и вписанной окружностей, является равносторонним.

113. Окружность с радиусом R , описанная около треугольника, его вершинами разделяется на дуги, градусные меры которых равны α , β , γ . Найдите стороны треугольника.

114. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, учитывая, что его:

- катеты равны m и n ;
- гипотенуза и острый угол соответственно равны k и α ;
- площадь и острый угол соответственно равны S и α ;
- периметр и острый угол соответственно равны P и α .

115. Найдите радиус r окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, учитывая, что его:

- боковая сторона и угол при вершине соответственно равны a и α ;
- основание и боковая сторона соответственно равны a и b ;
- основание и угол против него соответственно равны a и α ;
- высота и угол при основании соответственно равны h и β ;
- площадь и угол против основания соответственно равны S и α ;
- периметр и угол при основании соответственно равны P и β ;
- радиус описанной окружности и угол против основания соответственно равны R и α ;
- высоты равны h_1 и h_2 .

116. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью абсцисс угол, равный:

- 30° ;
- 45° ;
- 60° ;
- 120° ;
- 135° ;
- 150° .

117. Решите уравнение:

- $\frac{a^2 - 1}{a} + \frac{2a + 1}{a} = 3$;
- $\frac{b^2}{b - 2} - \frac{b + 2}{b - 2} = 4$;
- $1 + \frac{2}{c - 1} - \frac{6}{c^2 - 1} = \frac{3}{c + 1}$;
- $\frac{d + 1}{2d - 2} = \frac{d}{d - 1} + \frac{7 - 2d}{2d + 2}$.

118. Найдите коэффициенты a , b , c квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, учитывая, что:

а) его корнем является число 6 и при значении переменной x , равном 4, он достигает наименьшего значения -8 ;

б) при значении переменной x , равном $\frac{1}{2}$, он достигает наибольшего значения 24, а при значении переменной x , равном нулю, он принимает значение 23;

в) график функции, заданной трехчленом, пересекает ось абсцисс в точке $B(8; 0)$, а его вершина находится в точке $A(6; -12)$;

г) график функции, заданной трехчленом, пересекает ось ординат в точке с ординатой 15, а его вершина находится в точке $C(-2; 7)$.

119. На территории нашей страны гнездятся три вида неясытей — птиц отряда совиных: неясыть обыкновенная (рис. 65), неясыть длиннохвостая (рис. 66), неясыть бородатая (рис. 67). Если массу неясыти длиннохвостой взять в качестве доли, то массы неясытей бородатой и обыкновенной составят соответственно 1,2 и 0,73 этой доли. Найдите массы птиц, учитывая, что масса самой большой из этих птиц неясыти бородатой на 530 г меньше общей массы двух других птиц.



Рис. 65



Рис. 66



Рис. 67

120. На схеме, приведенной на рисунке 68, выявлены соотношения между массами неясытей — обыкновенной, длиннохвостой, бородатой. По этой схеме составьте задачу и решите ее.

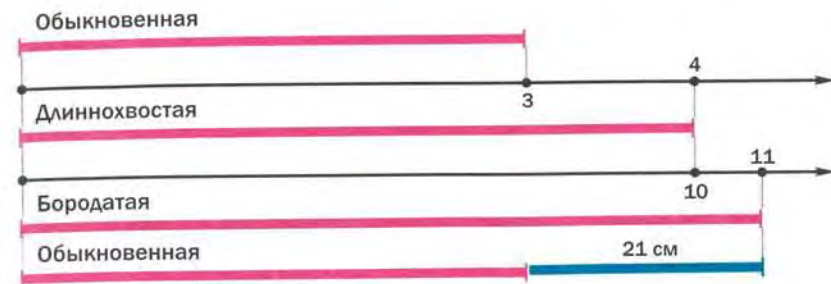


Рис. 68

121. Если переставить цифры единиц и сотен данного трехзначного числа, то от этого число уменьшится на 396. Найдите число, учитывая, что сумма его цифр равна 15, а количество сотен в три раза больше количества единиц.

* * *

122. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$.

Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.

123. Три прямые расположены на координатной плоскости так, как показано на рисунке 69. Установите, можно ли числа a , b , c выбрать так, чтобы уравнениями трех начерченных прямых были $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$.

124. Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разделен на 9 параллелограммов (рис. 70). Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, учитывая, что площадь всего параллелограмма равна S_0 , а площадь закрашенного параллелограмма — S_1 .

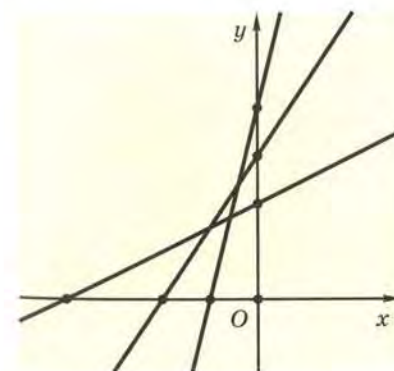


Рис. 69

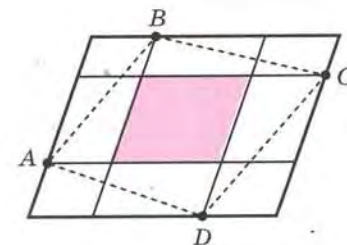


Рис. 70

4*. Окружность и четырехугольник

Исследуем сочетание окружности с четырехугольником.

Теорема 13. Если четырехугольник является описанным около окружности, то у него равны суммы противоположных сторон.

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и его стороны AB , BC , CD , DA касаются окружности в точках P , Q , R , S соответственно (рис. 71). Докажем, что $AB + CD = AD + BC$.

Поскольку отрезки касательных, проведенных из одной точки и заключенные между этой точкой и точками касания, равны, то:

$$AP = AS = k, BP = BQ = l, CQ = CR = m, DR = DS = n,$$

и

$$\begin{aligned} AB + CD &= k + l + m + n, \\ BC + AD &= l + m + k + n. \end{aligned}$$

Значит,

$$AB + CD = BC + AD.$$

В предыдущем параграфе было установлено, что окружность можно вписать в любой треугольник. Но не каждый четырехугольник имеет такое свойство.

Теорема 14. Четырехугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон.

Доказательство. Пусть у четырехугольника $MNPК$ суммы $MN + PK$ и $MK + NP$ противоположных сторон равны (рис. 72). Докажем, что в этот четырехугольник можно впи-

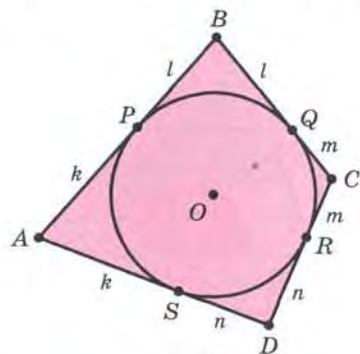


Рис. 71

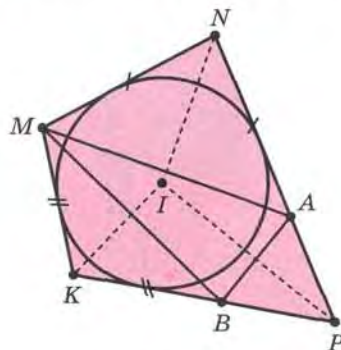


Рис. 72

сать окружность, т. е. что существует точка I , которая равноудалена от всех сторон этого четырехугольника.

Чтобы доказать существование точки, равноудаленной от всех четырех сторон, достаточно установить, что биссектрисы трех углов четырехугольника $MNPК$ пересекаются в одной точке.

Пусть для определенности $NP > MN$, тогда из условия $MN + PK = MK + NP$ получается, что $PK > MK$.

На лучах NP и KP отложим отрезки NA и KB соответственно равные сторонам NM и MK . Тогда $PA = NP - MN$ и $PB = PK - MK$. Теперь обратим внимание на то, что условие $MN + PK = MK + NP$ равносильно условию $PK - MK = NP - MN$. Значит, $PB = PA$.

Треугольники MNA , MKB и PAB являются равнобедренными с основаниями MA , MB и AB соответственно. Поэтому их биссектрисы, проведенные из углов N , K и P , являются медианами и высотами соответствующих треугольников. Иными словами, прямые, содержащие биссектрисы, проведенные из углов N , K и P треугольников MNP , MKP и PAB , являются серединными перпендикулярами к отрезкам MA , MB и AB , которые являются сторонами треугольника $MAВ$. Но, как было доказано в теореме 10, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Мы установили, что биссектрисы углов N , K и P четырехугольника $MNPК$ пересекаются в одной точке. Эта точка и является центром окружности, вписанной в четырехугольник $MNPК$.

Теорема 15. Если четырехугольник является вписанным в окружность, то:

- суммы противоположных углов равны 180° ;
- произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 73).

а) Докажем, что сумма противоположных углов четырехугольника $ABCD$ равна 180° . Рассмотрим углы BCD и BAD . Первый из них измеряется половиной дуги BAD , второй —

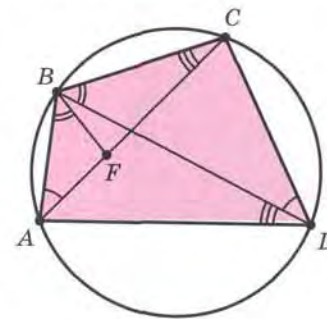


Рис. 73

половиной дуги BCD . Вместе эти дуги составляют окружность, градусная мера которой равна 360° . Значит, $\angle BCD + \angle BAD = \frac{1}{2} (\cup BAD + \cup BCD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

б) Докажем, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Если от луча BA отложим угол ABF , равный углу CBD , где точка F принадлежит диагонали AC , то получим две пары подобных треугольников — треугольники ABF и DBC , а также CBF и DBA (см. рис. 73).

Треугольники первой пары подобны, так как их углы BAF и BDC опираются на дугу BC и поэтому равны, а углы ABF и DBC равны по построению.

Треугольники другой пары подобны, так как их углы BCF и BDA опираются на дугу BA , а углы CBF и DBA состоят из равных углов ABF и DBC и общей части — угла DBF .

Подобие $\triangle ABF \sim \triangle DBC$ позволяет записать пропорцию $\frac{AB}{AF} = \frac{BD}{CD}$, а подобие $\triangle CBF \sim \triangle DBA$ — пропорцию $\frac{BC}{CF} = \frac{BD}{AD}$. Значит, $AB \cdot CD = BD \cdot AF$ и $BC \cdot AD = BD \cdot CF$. Сложив эти равенства, получим $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AF + BD \cdot CF$, или $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot (AF + CF)$. Но $AF + CF = AC$. Значит, $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$, или $BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Второе из установленных свойств вписанного четырехугольника называют *теоремой Птолемея*. Клавдий Птолемей (около 100 — около 178) — древнегреческий астроном, математик, географ (рис. 74).



Рис. 74

Теорема 16. *Четырехугольник является вписанным в окружность, если:*

- а) *сумма противоположных углов равна 180° ;*
- б) *углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну сторону, равны.*

► **Доказательство.** а) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ противоположные

углы вместе составляют 180° . Докажем, что около такого четырехугольника можно описать окружность (рис. 75).

Рассмотрим, например, углы BAD и BCD , сумма которых в соответствии с условием равна 180° . Через точки B, A, D проведем окружность. Это всегда можно сделать в соответствии с теоремой 10.

По отношению к этой окружности четвертая вершина C четырехугольника $ABCD$ может находиться или вне построенного круга, или внутри круга, или на окружности.

Если вершина C находится вне круга, т. е. занимает некоторое положение C_1 и стороны BC_1 и DC_1 пересекают окружность в точках F_1 и C_0 , то $\angle BC_1D = \frac{1}{2} (\cup BD - \cup C_0F_1) < \frac{1}{2} \cup BD$. Поэтому $\angle BC_1D < \angle BC_0D$ и сумма углов BAD и BC_1D меньше 180° . Получили противоречие с условием.

Если вершина C находится внутри круга, т. е. занимает некоторое положение C_2 , и продолжения сторон BC_2 и DC_2 пересекают окружность в точках C_0 и F_2 , то $\angle BC_2D = \frac{1}{2} (\cup BD + \cup C_0F_2) > \frac{1}{2} \cup BD$. Поэтому $\angle BC_2D > \angle BC_0D$ и сумма углов BAD и BC_2D больше 180° . Снова получили противоречие с условием.

Таким образом, вершина C не может находиться ни вне круга, ни внутри круга, она должна лежать на окружности, проходящей через вершины B, A, D . А это и означает, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность.

б) Доказательство этого утверждения повторяет с соответствующими изменениями приведенное выше доказательство первого утверждения.

Пусть, например, в четырехугольнике $ABCD$ углы ACB и ADB , опирающиеся на сторону AB и заключенные между его стороной и диагональю, равны друг другу. Докажем,

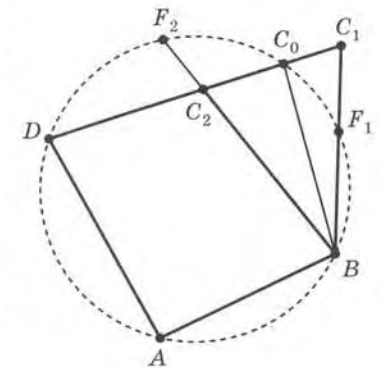


Рис. 75

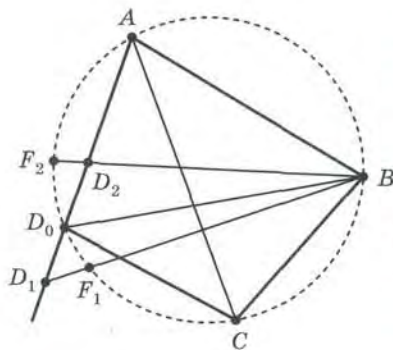


Рис. 76

что около такого четырехугольника можно описать окружность (рис. 76).

Через точки A, C, B проведем окружность. Четвертая вершина D может находиться или вне построенного круга, или внутри круга, или на окружности.

Если вершина D находится вне круга, т. е. занимает некоторое положение D_1 , и отрезки AD_1 и BD_1 пересекают окружность в

точках D_0 и F_1 , то $\angle AD_1B = \frac{1}{2} (\cup AB - \cup D_0F_1) < \frac{1}{2} \cup AB$. Поэтому $\angle AD_1B < \angle AD_0B = \angle ACB$, и это противоречит условию.

Если вершина D находится внутри круга, т. е. занимает некоторое положение D_2 , и продолжения отрезков AD_2 и BD_2 пересекают окружность в точках D_0 и F_2 , то $\angle AD_2B = \frac{1}{2} (\cup AB + \cup D_0F_2) > \frac{1}{2} \cup AB$. Поэтому $\angle AD_2B > \angle AD_0B$, а это снова противоречит условию.

Таким образом, вершина D не может находиться ни вне круга, ни внутри круга, она должна лежать на окружности, проходящей через вершины A, B, C . А это и означает, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность. ◀

Доказанная теорема дает достаточные условия принадлежности четырех точек плоскости одной окружности.

Следствие. Четыре точки A, B, X, Y плоскости лежат на одной окружности, если:

- точки X и Y расположены по разные стороны от прямой AB и углы AXB и $A Y B$ вместе составляют 180° ;
- точки X и Y расположены по одну сторону от прямой AB и углы AXB и $A Y B$ равны.

Это следствие лежит в основе метода вспомогательной окружности, сущность которого видна из решения следующей задачи.

Задача. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ACB , H — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 (рис. 77). Пусть прямая CH пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажем, что угол CC_1A является прямым.

Поскольку углы AA_1B и BB_1A оба прямые, то точки A, A_1, B, B_1 лежат на одной окружности с диаметром AB . Углы ABA_1 и AB_1A — вписанные в эту окружность и опираются на одну общую дугу AA_1 . Значит, эти углы равны.

Углы HA_1C и HB_1C оба прямые, значит, точки C, A_1, H, B_1 лежат на одной окружности с диаметром HC . Поэтому вписанные в эту окружность углы CB_1A_1 и CHA_1 равны, так как опираются на одну дугу CA_1 .

Рассмотрим треугольники ABA_1 и AHC_1 . Они имеют общий угол A , углы ABA_1 и AHC_1 , в отдельности равные углу A_1B_1C , равны. Поэтому у треугольников равны и третьи углы: $\angle AA_1B = \angle HC_1A$. А поскольку угол AA_1B прямой, то и равный ему угол HC_1A также прямой.

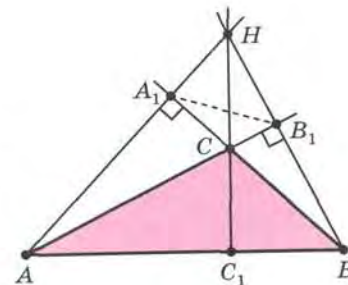


Рис. 77

1. Сформулируйте свойство сторон описанного четырехугольника.
2. Сформулируйте признак описанного четырехугольника.
3. Сформулируйте свойство углов, образованных стороной и диагональю вписанного четырехугольника.
4. Сформулируйте свойство противоположных углов вписанного четырехугольника.
5. Сформулируйте теорему Птолемея.
6. Сформулируйте признаки вписанного четырехугольника.
7. Укажите условия принадлежности четырех точек плоскости одной окружности.

125. Две смежные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 18 см и 34 см, а две другие относятся как 3 : 2. Найдите периметр четырехугольника.

126. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 56 см. Найдите стороны четырехугольника, учитывая, что две его смежные стороны относятся как 2 : 3, а две другие — как 5 : 8.

127. Докажите, что площадь S четырехугольника, описанного около окружности радиуса r , и его полупериметр p связаны равенством $S = pr$.

128. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника и радиус вписанной в него окружности соответственно равны 24 и 5. Найдите площадь четырехугольника.

129. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N выбраны на окружности так, что прямые AM и CN делят углы A и C пополам. Докажите, что MN — диаметр.

130. Найдите основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности, учитывая, что:

- а) боковая ее сторона равна 5, а диагональ — 7;
- б) радиус окружности равен $2\sqrt{6}$, а диагональ — 14;
- в) радиус окружности равен 7,5, а площадь трапеции — 255;
- г) периметр трапеции равен 100, а ее площадь — 600.

131. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой равны 13 и 15, а площадь — 168. Найдите основания трапеции.

132. Сторона AD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ является диаметром этой окружности. Докажите, что проекции BA_1 и CD_1 сторон AB и DC на прямую BC равны друг другу.

133. Докажите, что:

- а) если четырехугольник является описанным около окружности, то у него равны суммы углов, под которыми видны из центра круга противоположные стороны;
- б) если равны суммы углов, под которыми видны из некоторой точки противоположные стороны четырехугольника, то такой четырехугольник не обязательно является описанным около окружности.

134. Докажите, что окружность можно описать около:

- а) прямоугольника;
- б) равнобедренной трапеции-непараллелограмма.

135. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ не является выпуклым, то условие равенства углов ABD и ACD не является достаточным для того, чтобы четырехугольник был вписанным.

136. Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

137. Найдите периметр описанного четырехугольника, у которого сумма двух противоположных сторон равна 120 мм.

138. Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник, сумма двух противоположных сторон которого и его площадь соответственно равны 10 м и 12 м^2 .

139. Докажите, что окружность можно вписать в:

- а) квадрат; б) ромб; в) дельтоид (рис. 78).

140. Найдите радиус окружности, вписанной в:

- а) ромб со стороной a и углом α ;
- б) дельтоид со сторонами m и n и углом β между ними.

141. Докажите, что если четырехугольник можно разбить на два вписанных четырехугольника, то этот четырехугольник является трапецией.

142. Найдите наименьший диаметр бревна, из которого можно выпилить брус шириной 24 см и толщиной 10 см.

143. Найдите:

- а) наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг с радиусом R ;
- б) четырехугольник с наибольшей площадью, вписанный в круг с радиусом R .

144. В окружности с диаметром AB построены параллельные хорды AC и BD . Установите:

- а) вид четырехугольника $ACBD$;
- б) площадь четырехугольника $ACBD$, учитывая, что радиус окружности, хорды AC и BD соответственно равны r , a и b ;
- в) границы изменения площади четырехугольника $ACBD$.



Рис. 78

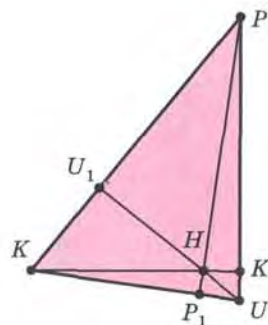


Рис. 79

145. Высоты KK_1 , PP_1 , UU_1 треугольника KPU пересекаются в точке H (рис. 79). Укажите все четырехугольники с вершинами в точках K , P , U , K_1 , P_1 , U_1 , H , которые являются вписанными.

146. Докажите, что если можно описать окружность около:

- параллелограмма, то этот параллелограмм — прямоугольник;
- трапеции, то эта трапеция равнобедренная.

147. Отрезки BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC . Докажите, что если четырехугольник BC_1B_1C вписанный, то треугольник ABC равнобедренный.

148. Докажите, что если у двух четырехугольников соответственно равны стороны и один из них является описанным около окружности, то таким является и другой четырехугольник.

149. Прямая, перпендикулярная большей стороне параллелограмма, разделяет его на два четырехугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Найдите меньший угол параллелограмма, учитывая, что стороны параллелограмма равны 4 и 6.

150. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции, учитывая, что ее:

- большее и меньшее основания и высота соответственно равны 11, 5 и 4;
- большее и меньшее основания и боковая сторона соответственно равны 7, 1 и 5;
- большее и меньшее основания и диагональ соответственно равны 17, 7 и 13;
- большее основание a , боковая сторона k и угол α между ними таковы, что $a = 14$, $k = 13$ и $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$.

151. Найдите радиус наименьшего круга, содержащего равнобедренную трапецию с основаниями a и b и боковой стороной c .

152. Найдите, если можно, углы и стороны трапеции по сведениям на рисунке:

- 80;
- 81;
- 82;
- 83.

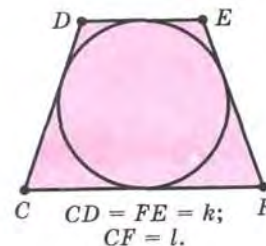


Рис. 80

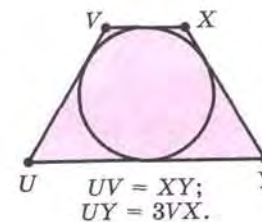


Рис. 81

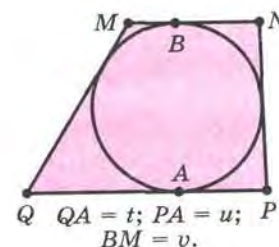


Рис. 82

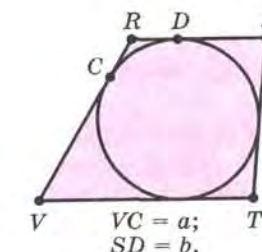


Рис. 83

153. Докажите, что точки пересечения пар биссектрис соседних углов выпуклого четырехугольника лежат на одной окружности.

154. Каждая из четырех окружностей плоскости с центрами O_1 , O_2 , O_3 , O_4 касается внешним образом двух других окружностей (рис. 84). Докажите, что точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 попарного касания этих окружностей лежат на одной окружности.

155. Сформулируйте утверждение, обратное теореме Птолемея, и установите, верно ли оно.

156. Какой вид принимает равенство, установленное теоремой Птолемея, если вписанный четырехугольник является:

- прямоугольником;
- равнобедренной трапецией?

157. Стороны AD и BC вписанного четырехугольника $ABCD$ равны k и l , а точка Q пересечения диагоналей этого четырехугольника

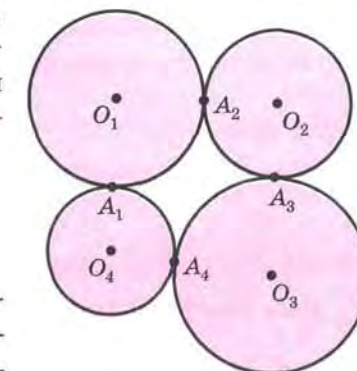


Рис. 84

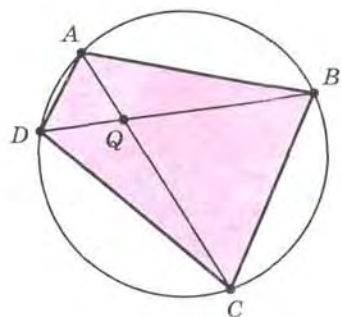


Рис. 85

отсекает от них отрезки QA и QD длиной m и n соответственно (рис. 85). Найдите стороны QB и QC треугольника BQC .

158. Время движения автобуса от Минска до Бреста (рис. 86) в новом расписании сокращено на 45 мин, и поэтому новая средняя скорость движения должна быть на 13,5 км/ч больше прежней. Найдите среднюю скорость движения по новому расписанию.

159. В гостинице есть номера, количество мест в которых отличается на 1. В номерах с меньшим количеством мест может быть поселено 72 человека, а в других номерах — 42 человека. Найдите количество номеров с большим количеством мест, учитывая, что их на 22 меньше.

160. Если рабочий будет работать с прежней производительностью, то ему для выполнения задания на изготовление 360 деталей к назначенному сроку не хватит 4 дней, а если он увеличит производительность труда на 3 детали в день, то задание будет выполнено в срок. Найдите производительность труда рабочего.

161. Решите неравенство:

а) $a - \frac{a-1}{2} \geq \frac{a-2}{4} - \frac{a-3}{6}$;

б) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$.

162. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3b - 4 > 22 - 4b, \\ 7b + 2 < 9b - 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y + 1 > 3y + 4, \\ 5y - 1 \geq 8y + 17. \end{cases}$



Рис. 85

163. Постройте график функции $y = x^2 - x - 6$. Запишите неравенством и промежутком множество значений аргумента x , при которых значение функции y :

- | | |
|-----------------|--------------------|
| а) меньше нуля; | г) не меньше нуля; |
| б) равно нулю; | д) не равно нулю; |
| в) больше нуля; | е) не больше нуля. |

164. Постройте график функции $y = -x^2 + 5x + 6$. Запишите неравенством и промежутком множество значений аргумента x , при которых значение функции y :

- | | |
|-----------------|--------------------|
| а) меньше нуля; | г) не меньше нуля; |
| б) равно нулю; | д) не равно нулю; |
| в) больше нуля; | е) не больше нуля. |

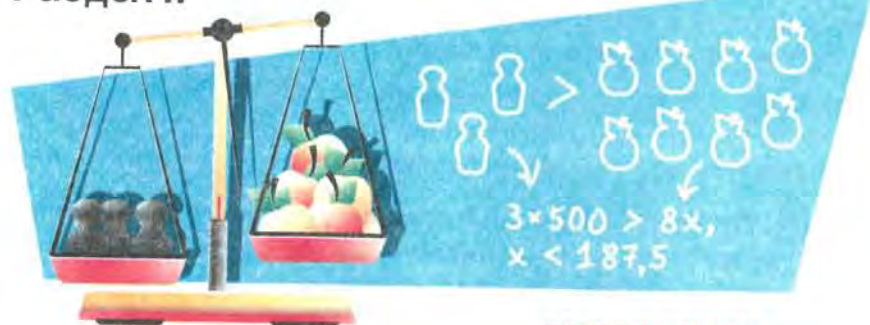
* * *

165. Докажите, что если произведение неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равно 1, то $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n$.

166. Сумма пяти натуральных чисел равна 2007. Какое наибольшее значение может принимать их НОД?

167. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 . Отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 разбили треугольник на четыре равновеликих треугольника. Докажите, что A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC .

Раздел II



НЕРАВЕНСТВА

5. Квадратные неравенства

Вы уже умеете решать линейные неравенства с одной переменной. Теперь научимся решать квадратные неравенства с одной переменной, т. е. неравенства вида:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c > 0, & \quad ax^2 + bx + c < 0, \\ ax^2 + bx + c \geq 0, & \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \neq 0, \end{aligned}$$

где a, b, c — некоторые числа, x — переменная и $a \neq 0$.

Теорема 1. Если дискриминант D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

а) отрицателен, то его значения имеют тот же знак, что и старший коэффициент a , при всех значениях переменной x ;

б) равен нулю, то его значения имеют тот же знак, что и старший коэффициент a , при всех значениях переменной x , отличных от корня трехчлена;

в) положителен, то его значения имеют тот же знак, что и старший коэффициент a при значениях переменной x , меньших меньшего корня трехчлена и больших большего его корня, и имеют знак, противоположный знаку старшего коэффициента a , если значения переменной x заключены между корнями трехчлена.

► **Доказательство.** Пусть дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с переменной x , старшим коэффициентом a , который не равен нулю, вторым коэффициентом b и свободным членом c .

а) Пусть дискриминант D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен. В квадратном трехчлене $ax^2 + bx + c$ выделим полный квадрат — получим:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

По условию значение выражения $b^2 - 4ac$ отрицательно. Тогда значение дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ также отрицательно, так как ее знаменатель $4a^2$ положителен, а поэтому значение выражения

$-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положительно. Значение выражения $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положительно, так как первое слагаемое $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ этой алгебраической суммы неотрицательно, а второе ее слагаемое $-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положительно.

Получается, что значение выражения $a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$, которое является произведением старшего коэффициента a и положительного множителя $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, имеет тот же знак, что и коэффициент a . Поэтому и значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ совпадает по знаку со значением его старшего коэффициента a .

б) Пусть дискриминант D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю и x_1 — его единственный корень. Тогда этот трехчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Значение выражения $(x - x_1)^2$ при значении переменной x , не равном x_1 , положительно. Поэтому при таком значении переменной x значение выражения $a(x - x_1)^2$, а значит, и значение равного ему квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, совпадает по знаку со значением старшего коэффициента a этого трехчлена.

в) Пусть дискриминант D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, а x_1 и x_2 — его корни, и $x_1 < x_2$. Тогда этот трехчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пусть значение переменной x меньше x_1 , т. е. истинно неравенство $x < x_1$. Учитывая, что $x_1 < x_2$, получаем, что $x < x_2$. Поэтому разности $x - x_1$ и $x - x_2$ обе отрицательны, а их произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ положительно. В этом случае знак произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$ совпадает со знаком a .

Пусть значение переменной x больше x_2 , т. е. истинно неравенство $x > x_2$. Учитывая, что $x_2 > x_1$, получаем, что $x > x_1$. Поэтому разности $x - x_1$ и $x - x_2$ обе положительны, и их произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ также положительно. В этом случае знак произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$ также совпадает со знаком a .

Пусть значение переменной x удовлетворяет неравенству $x_1 < x < x_2$, т. е. истинны неравенства $x > x_1$ и $x < x_2$. Тогда разность $x - x_1$ положительна, а разность $x - x_2$ отрицательна, и их произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ отрицательно. В этом случае знак произведения $a(x - x_1)(x - x_2)$ противоположен знаку a . ◀

Теореме 1 можно дать геометрическую интерпретацию, если учесть, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ задает квадратную функцию $y = ax^2 + bx + c$, которая графически изображается параболой. Эта парабола имеет вершину в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, ветви параболы направлены вверх, если старший коэффициент $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Пусть $D < 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней. Это означает, что соответствующая парабола не пересекает ось абсцисс. Поэтому она целиком расположена в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака старшего коэффициента a . Если $a > 0$, то значения квадратного трехчлена положительны при всех значениях переменной x , а соответствующая парабола находится в верхней полуплоскости (рис. 87). Если $a < 0$, то значения квадратного трехчлена отрицательны при всех значениях переменной x ,

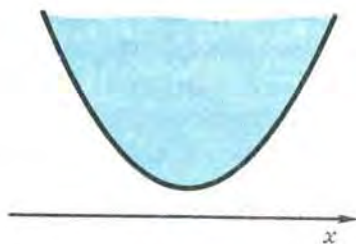


Рис. 87

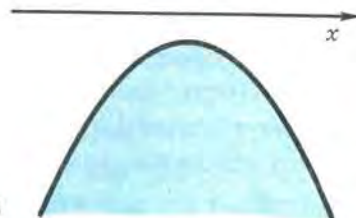


Рис. 88

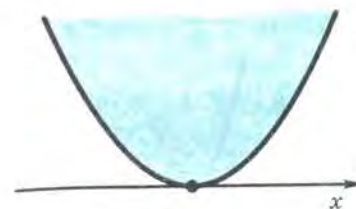


Рис. 89

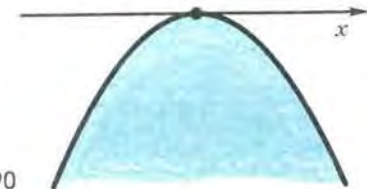


Рис. 90

а соответствующая парабола находится в нижней полуплоскости (рис. 88).

Пусть $D = 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень $x_1 = -\frac{b}{2a}$. Это означает, что соответствующая парабола касается оси абсцисс своей вершиной. Поэтому все точки параболы, за исключением вершины, расположены в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака старшего коэффициента a . Если $a > 0$, то значения квадратного трехчлена положительны при всех значениях переменной x , кроме значения, равного $-\frac{b}{2a}$, а соответствующая парабола находится в верхней полуплоскости, касаясь вершиной оси абсцисс (рис. 89). Если $a < 0$, то значения квадратного трехчлена отрицательны при всех значениях переменной x , кроме значения $-\frac{b}{2a}$, а соответствующая парабола находится в нижней полуплоскости, касаясь вершиной оси абсцисс (рис. 90).

Пусть $D > 0$, тогда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2 , где $x_1 < x_2$. Это означает, что соответствующая парабола пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами x_1 и x_2 . Если $a > 0$, то значения квадратного трехчлена положительны при значениях переменной x , меньших меньшего корня x_1 и больших большего корня x_2 , и отрицательны при значениях переменной x , заключенных между корнями x_1 и x_2 . Соответствующая парабола расположена так, как показано на рисунке 91. Если $a < 0$, то значения квадратного трехчлена положительны при значениях переменной x , заключенных между корнями x_1 и x_2 , и отрицательны при значениях переменной x , меньших мень-

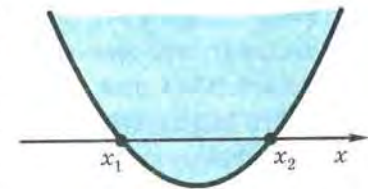


Рис. 91

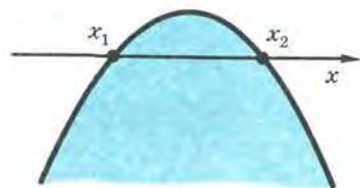


Рис. 92

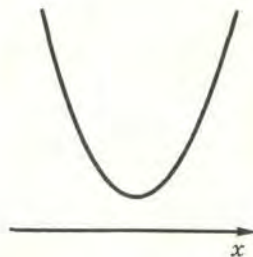


Рис. 93

шего корня x_1 и больших большего корня x_2 , а соответствующая парабола расположена так, как показано на рисунке 92.

Теорема 1 лежит в основе алгоритма решения квадратного неравенства, который можно сформулировать так:

найти корни соответствующего квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ или установить, что их нет;

по знаку старшего коэффициента a определить, как направлены ветви параболы — вверх или вниз;

начертить ось абсцисс и относительно ее схематично показать расположение соответствующей параболы — графика квадратного трехчлена;

по полученному рисунку записать ответ.

Пример 1. Решим неравенство $3x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 5$:

$$3x^2 - 7x + 5 = 0;$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -11;$$

Корней нет.

Определим, как направлены ветви параболы: поскольку $a = 3$ и $3 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Схематически покажем расположение параболы $y = 3x^2 - 7x + 5$ относительно оси абсцисс, как это сделано на рисунке 93.

По полученному рисунку записываем ответ. Рисунок 93 показывает, что значения квадратного трехчлена $3x^2 - 7x + 5$ положительны при всех значениях переменной x . Это означает, что неравенство $3x^2 - 7x + 5 \geq 0$ истинно при всех значениях переменной x , т. е. решениями неравенства являются все действительные числа.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$-3t^2 - 7t - 4 \leq 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $-3t^2 - 7t - 4$:

$$-3t^2 - 7t - 4 = 0;$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 1;$$

$$t_1 = -\frac{4}{3}; \quad t_2 = -1.$$

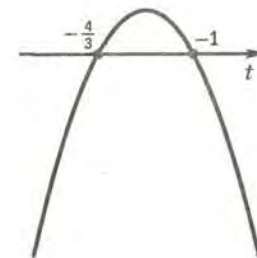


Рис. 94

Определим, как направлены ветви параболы: поскольку $a = -3$ и $-3 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Схематически покажем расположение параболы $y = -3t^2 - 7t - 4$ относительно оси абсцисс, как это сделано на рисунке 94.

По полученному рисунку записываем ответ. Рисунок 94 показывает, что значения квадратного трехчлена $-3t^2 - 7t - 4$ неположительны при значениях переменной t , расположенных между числами $-\frac{4}{3}$ и -1 . Это означает, что неравенство $-3t^2 - 7t - 4 \leq 0$ истинно при таких значениях переменной t , которые удовлетворяют условию: $t \leq -\frac{4}{3}$ или $t \geq -1$.

Ответ. $(-\infty; -\frac{4}{3}] \cup [-1; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство $3a^2 + 7a - 6 > 0$.

Найдем корни квадратного трехчлена $3a^2 + 7a - 6$:

$$3a^2 + 7a - 6 = 0;$$

$$D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 121;$$

$$a_1 = -3; \quad a_2 = \frac{2}{3}.$$

Определим, как направлены ветви параболы: поскольку $a = 3$ и $3 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Схематически покажем расположение параболы $y = 3a^2 + 7a - 6$ относительно оси абсцисс, как это сделано на рисунке 95.

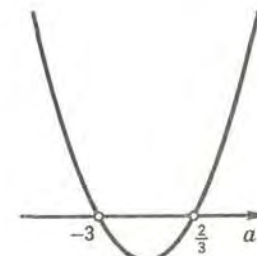


Рис. 95

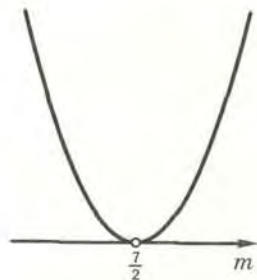


Рис. 96

По полученному рисунку записываем ответ. Рисунок 95 показывает, что значения квадратного трехчлена $3a^2 + 7a - 6$ положительны при значениях переменной a , расположенных левее числа -3 или правее числа $\frac{2}{3}$. Это означает, что неравенство $3a^2 + 7a - 6 > 0$ истинно при таких значениях переменной a , что $a < -3$ или $a > \frac{2}{3}$.

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство $4m^2 - 28m + 49 \leq 0$.

Корнем квадратного трехчлена $4m^2 - 28m + 49$ является число $\frac{7}{2}$.

Ветви параболы направлены вверх.

Парабола $y = 4m^2 - 28m + 49$ относительно оси абсцисс расположена так, как показано на рисунке 96, из которого видно, что значения квадратного трехчлена $4m^2 - 28m + 49$ положительны при всех значениях переменной m , кроме значения $\frac{7}{2}$, при котором этот трехчлен равен нулю.

Ответ. $\frac{7}{2}$.

- ?
1. Когда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом имеет положительные значения; отрицательные значения?
 2. Когда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с положительным дискриминантом имеет положительные значения; отрицательные значения; неположительные значения; неотрицательные значения?
 3. Когда квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с нулевым дискриминантом имеет положительные значения; отрицательные значения; неположительные значения; неотрицательные значения?
 4. Сформулируйте алгоритм решения квадратного неравенства.

168. Постройте в тетради следующую таблицу исследования знака квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и заполните ее в соответствии с теоремой 1.

Дискриминант, D	Старший коэффициент, a	Графическая иллюстрация	Значения переменной, при которых значение квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$	
			положительно	отрицательно
$D > 0$	$a > 0$			
$D > 0$	$a < 0$			
$D = 0$	$a < 0$			
$D = 0$	$a > 0$			
$D < 0$	$a > 0$			
$D < 0$	$a < 0$			

169. Постройте график функции $T = -2a^2 + 2a + 4$ и укажите по нему те значения переменной a , при которых значения функции T :

- а) отрицательны;
- б) положительны;
- в) неотрицательны;
- г) неположительны.

170. Используя график функции $T = 2a^2 - 2a - 4$, изображенный на рисунке 97, укажите те значения аргумента a , при которых значения функции T :

- а) равны 0;
- б) меньше 0;
- в) больше 0;
- г) равны 8;
- д) меньше 8;
- е) больше 8;
- ж) равны -4;
- з) меньше -4;

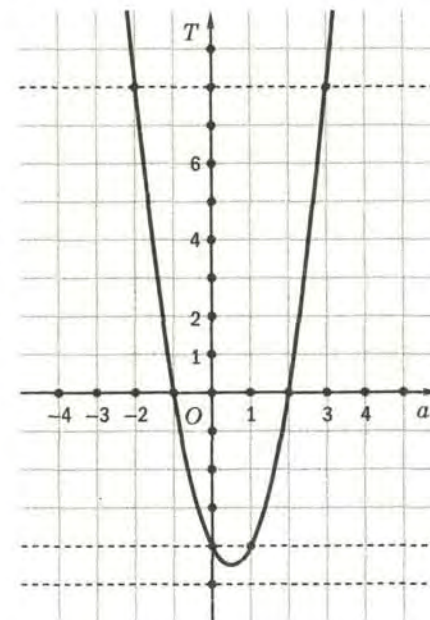


Рис. 97

- и) больше -4; л) меньше -5;
к) равны -5; м) больше -5.

171. Используя график функции $y = -x^2 + 6x - 5$, изображенный на рисунке 98, укажите те значения аргумента x , при которых значения функции y :

- а) равны 0; ж) равны -5;
б) меньше 0; з) меньше -5;
в) больше 0; и) больше -5;
г) равны 3; к) равны 4;
д) меньше 3; л) меньше 4;
е) больше 3; м) больше 4.

172. Найдите те значения переменной t , при которых не больше нуля значения функции:

- а) $h = -t^2 + 6t - 9$;
б) $g = t^2 - 4t + 4$;
в) $k = -\frac{1}{2}t^2 - 3t - \frac{9}{2}$;
г) $l = -\frac{1}{3}t^2 - 4t - 12$.

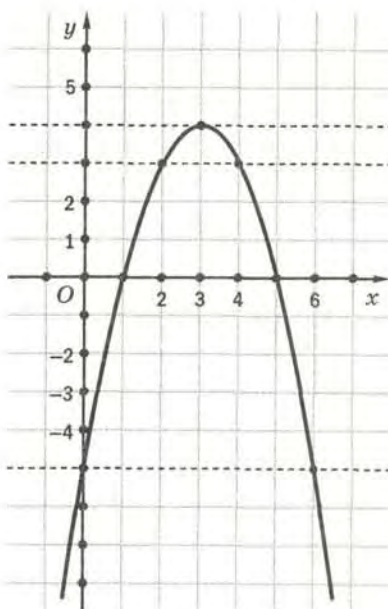


Рис. 98

173. Запишите какое-либо квадратное неравенство, множеством решений которого является:

- а) промежуток (1; 5);
б) множество $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$;
в) промежуток [1; 5];
г) множество $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

174. Запишите какое-либо квадратное неравенство, множеством решений которого:

- а) состоит из одного числа 7;
б) из всех действительных чисел, кроме числа 7;
в) из всех действительных чисел;
г) не содержит ни одного числа.

175. Используя график функции $s = \frac{2}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{10}{9}$, изображенный на рисунке 99, решите неравенство:

- а) $\frac{2}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{10}{9} < 0$;
б) $\frac{2}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{10}{9} \leq 0$;
в) $\frac{2}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{10}{9} > 0$;
г) $\frac{2}{9}t^2 + \frac{8}{9}t - \frac{10}{9} \geq 0$.

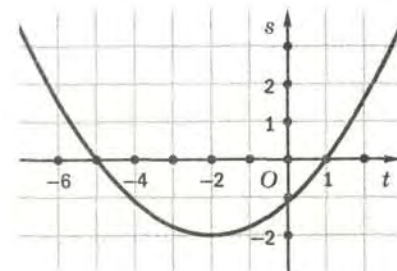


Рис. 99

176. Используя график функции $C = -\frac{1}{8}z^2 - z - 2$, изображенный на рисунке 100, решите неравенство:

- а) $-\frac{1}{8}z^2 - z - 2 < 0$; в) $-\frac{1}{8}z^2 - z - 2 > 0$;
б) $-\frac{1}{8}z^2 - z - 2 \leq 0$; г) $-\frac{1}{8}z^2 - z - 2 \geq 0$.

177. Решите неравенство:

- а) $u^2 + 10 > 0$; г) $(e + 5)^2 + 3 < 1$;
б) $d^2 + 9 < 0$; д) $-(w + 1)^2 - 2 < 0$;
в) $(v - 1)^2 + 1 > 0$; е) $-(f - 2)^2 - 4 > 0$.

178. Решите неравенство:

- а) $4u^2 - 9 > 0$; д) $2a^2 - 4a + 9 \leq 0$;
б) $9d^2 - 25 > 0$; е) $3q^2 + 2q + 4 \geq 0$;
в) $x^2 - 3x + 2 > 0$; ж) $\frac{1}{2}m^2 - 4m \geq -8$;
г) $y^2 - 3y - 4 < 0$; з) $\frac{1}{3}z^2 + 2z \leq -3$.

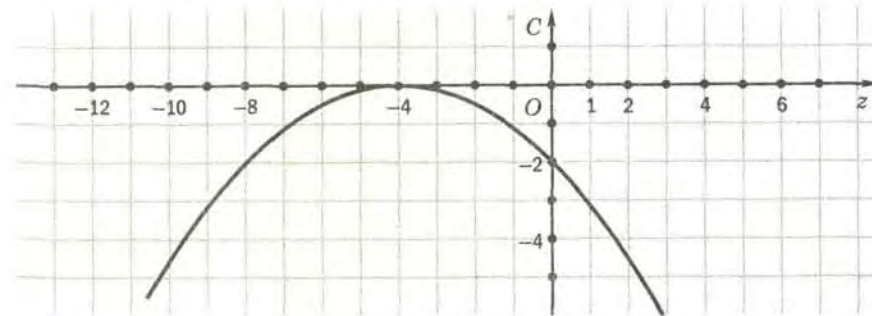


Рис. 100

179. Решите неравенство:

- а) $r^2 - 14r + 45 > 0$; д) $x^2 + 105 > 22x$;
 б) $a^2 - 11a + 30 > 0$; е) $t^2 - 5t + 4 < 0$;
 в) $s^2 + 11s + 30 > 0$; ж) $m^2 - 6m + 9 < 0$;
 г) $b^2 - 4b + 3 > 0$; з) $z^2 - 8z + 7 > 0$.

180. Решите неравенство:

- а) $3c^2 - 5c - 2 > 0$; е) $a^2 - 4a + 3 \neq 0$;
 б) $5k^2 - 7k + 2 < 0$; ж) $3e^2 - 4e + 5 < 0$;
 в) $3m^2 - 7m - 6 < 0$; з) $3l^2 - 11l - 4 < 0$;
 г) $3r^2 - 2r + 5 > 0$; и) $5v^2 - 8v - 4 < 0$;
 д) $2u^2 - 3u + 7 < 0$; к) $2b^2 + 9b - 56 \neq 0$.

181. Решите неравенство:

- а) $a^2 - 2a + 3 > 0$; е) $t^2 - t \neq 6$;
 б) $4b - b^2 < 5$; ж) $d(d + 5) \leq 2(d^2 + 2)$;
 в) $x^2 + 9 < 6x$; з) $11 - (z + 1)^2 \geq z$;
 г) $(2 - y)y < 1$; и) $(u + 4)(u + 5) - u \leq 5$;
 д) $c(c + 5) - 2 > 4c$; к) $2v^3 - 9v^2 \neq 35v$.

182. Решите неравенство:

- а) $-2 + d - 3d^2 < 0$; е) $n^2 + 2 < 3n - \frac{1}{8}n^2$;
 б) $-5 + 4s - 3s^2 > 0$; ж) $6p^2 + 1 \leq 5p - \frac{1}{4}p^2$;
 в) $2a^2 - 3a + 4 > a^2 + 2a - 2$; з) $2z(z - 1) < 3(z + 1)$;
 г) $2x^2 - 2x - 7 > x^2 + 5x - 17$; и) $\frac{5}{3}y - \frac{1}{6}y^2 \leq y + 1$;
 д) $m(m + 1) < 2(1 - 2m - m^2)$; к) $\frac{1}{6}y^2 + \frac{2}{3} \geq y - 1$.

183. Найдите область определения функции:

- а) $y = \sqrt{2 - t - t^2}$; в) $t = \sqrt{2b - 3 - 5b^2}$;
 б) $z = \frac{2}{\sqrt{9a^2 - 3a - 2}}$; г) $u = \sqrt{\frac{7}{7c^2 - 48c - 7}}$.

184. Найдите область определения функции:

- а) $P = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$; в) $R = \sqrt{j^2 - 4j + 4}$;
 б) $Q = \frac{2n - 7}{\sqrt{-12n^2 - 3n - 1}}$; г) $Y = \sqrt{\frac{37}{s^2 - 4s + 4}}$.

185. Установите, какими могут быть измерения прямоугольника, которые отличаются на 5, учитывая, что площадь прямоугольника не меньше:

- а) 14; б) 36; в) 66.

186. Одно основание трапеции равно 7. Установите, какими могут быть второе основание и меньшая его на 1 высота, учитывая, что площадь трапеции должна быть не меньше:

- а) 64; б) 154; в) 192.

187. Один из углов параллелограмма равен 150° . Определите, какими могут быть его стороны, отличающиеся на 3, учитывая, что площадь параллелограмма не меньше:

- а) 2; б) 20; в) 252.

188. Велосипедист должен проехать 12 км по шоссе и затем столько же по грунтовой дороге. Какой может быть скорость велосипедиста по грунтовой дороге, если она на 2 км/ч меньше скорости по шоссе, а время движения не должно превышать 1 ч 25 мин.

189. Решите неравенство:

- а) $\frac{3i+5}{4} - 1 \leq \frac{i-2}{3} + i$; г) $(m-1)(4-m) < 0$;
 б) $\frac{32-8j}{2} + 4 < \frac{2j-3}{4} - 2j$; д) $\frac{2-k}{k-5} > 0$;
 в) $(n-3)(4-n) > 0$; е) $\frac{l-5}{l-8} > 0$.

190. Докажите, что:

- а) решениями неравенства $x^2 - 2x + a > 0$ являются все действительные числа, если $a > 1$;
 б) неравенство $y^2 + 2y + b \leq 0$ не имеет решений, если $b > 1$.

191. Найдите все значения переменной s , при которых для всех действительных чисел истинно неравенство:

- а) $x^2 - (s+2)x + 4 > 0$; б) $(s^2 - 1)t^2 + 2(s-1)t + 2 > 0$.

192. Через концы дуги в 200° проведены две касательные к соответствующей окружности. Найдите угол между этими касательными.

193. Два луча, выходящие из точки P , пересекают окружность — один в точках R и Q , второй — в точках T и S

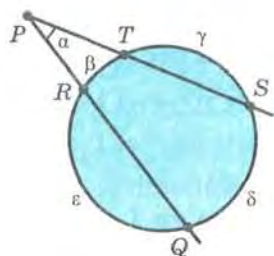


Рис. 101

(рис. 101), при этом угол QPS равен α , а дуги RT , TS , SQ , QR — β , γ , δ , ϵ соответственно. Найдите:

- α , γ , если $\beta = 26^\circ$, $\delta = 74^\circ$, $\epsilon = 110^\circ$;
- δ , γ , если $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 41^\circ$, $\epsilon = 130^\circ$;
- β , γ , если $\alpha = 29^\circ$, $\delta = 69^\circ$, $\epsilon = 120^\circ$;
- α , β , если $\gamma = 54^\circ$, $\epsilon = 126^\circ$, $\delta = 95^\circ$.

194. Высота AB дуги XAY окружности с радиусом 15 м, которой ограничена ферма моста, равна 3 м (рис. 102). Найдите длину XU пролета моста.

195. Мулуя, Умм-эр-Рбия, Себу, Тенсифт — наиболее крупные реки в Марокко (рис. 103). Если бы длина Себу была на 10 км больше, а длина Умм-эр-Рбии — на 10 км меньше, то эти длины и длина Мулуи относились бы как 18 : 21 : 20. Найдите длины этих рек, учитывая, что удвоенная длина Тенсифта на 16 км меньше длины Умм-эр-Рбии и на 20 км больше длины Мулуи.

196. Касабланка, Рабат, Фес, Марракеш — наибольшие города Марокко (см. рис. 103). На рисунке 104 показаны соотношения между числом жителей этих городов. Составьте задачу и решите ее.

197. Натуральные числа a , b , c таковы, что числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ — все простые. Докажите, что среди чисел a , b , c есть равные.

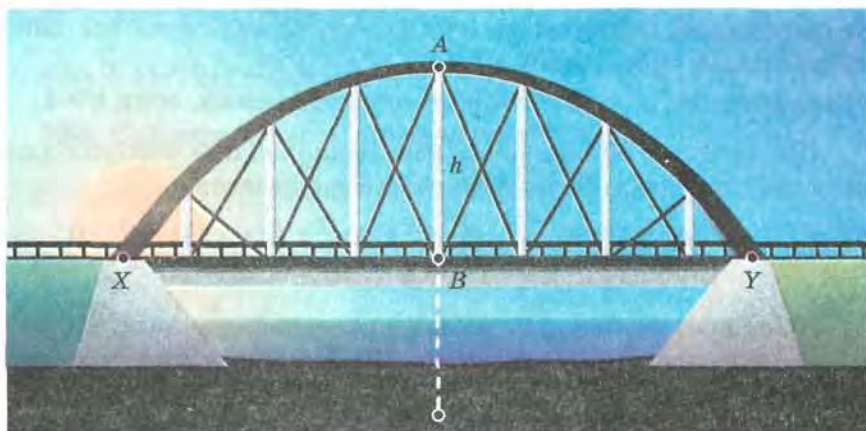


Рис. 102



Рис. 103

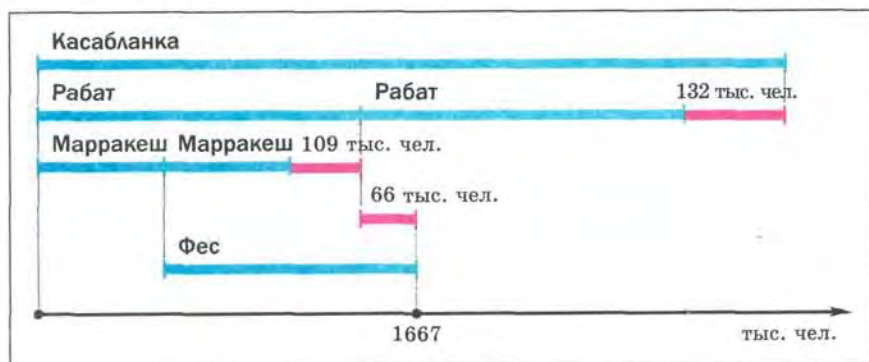


Рис. 104

198. Отрезки AK и BM — медианы треугольника ABC . Докажите, что если $\angle CAK = \angle CBM = 30^\circ$, то треугольник ABC — равносторонний.

199. Числа 5, 6, 7, 8 имеют то свойство, что каждое из них представляется произведением различных простых чисел в нечетных степенях: $5 = 5^1$, $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $7 = 7^1$, $8 = 2^3$. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел имеет это свойство?

6. Рациональные неравенства

Квадратное неравенство — это частный случай рационального неравенства.

Рациональным неравенством называется неравенство вида $q(x) \vee 0$, где $q(x)$ — рациональное выражение, а символом $\vee$ обозначен один из знаков неравенства $<, >, \leq, \geq, \neq$.

Примерами рациональных неравенств являются неравенства:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 (x-1)^2 (x-4) &> 0, \\ (x-4)(3x+1)(x+11)(x-1) &\leq 0; \\ (x-4)(3x^2-3x+8)(x+11)(x-1) &< 0; \\ \frac{2x^4+x^2-x+1}{(5x+2)(2x^2-3x+11)} &\geq 0; \\ \frac{x^4+4x^3+9x^2+20x+20}{4x^3+3x^2+1} &\neq 0. \end{aligned}$$

Пример 1. Решим неравенство $\left(x + \frac{7}{3}\right)^3 (x-1)^2 (x-4) > 0$.

Числа $-\frac{7}{3}$, 1 и 4, при которых значение выражения в левой части равно нулю, разделяют координатную прямую на 4 промежутка (рис. 105). Установим, какой знак имеет значение функции $y = \left(x + \frac{7}{3}\right)^3 (x-1)^2 (x-4)$ на каждом из них. Этот знак определяется знаками значений множителей $x + \frac{7}{3}$, $x-1$, $x-4$.

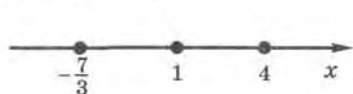


Рис. 105



Рис. 106

Пусть значение переменной x принадлежит самому правому промежутку $(4; +\infty)$, т. е. истинно неравенство $x > 4$. Тогда все двучлены $x + \frac{7}{3}$, $x-1$ и $x-4$ положительны, а поэтому на промежутке $(4; +\infty)$ значения функции y положительны (рис. 106).

Пусть переменная x переходит из промежутка $(4; +\infty)$ в соседний слева промежуток $(1; 4)$ (рис. 107). Тогда значение

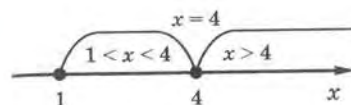


Рис. 107

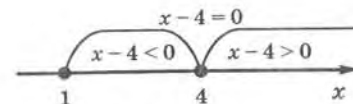


Рис. 108

двучлена $x-4$ с положительного через нулевое становится отрицательным (рис. 108), а остальные двучлены своих знаков не меняют. Поскольку в произведении $\left(x + \frac{7}{3}\right)^3 (x-1)^2 (x-4)$ только один множитель меняет свой знак на противоположный, то знак произведения меняется на противоположный. Поэтому на промежутке $(1; 4)$ значения функции y отрицательны (рис. 109).

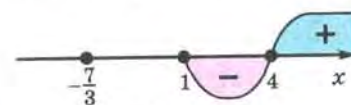


Рис. 109

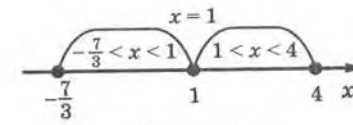


Рис. 110

Пусть переменная x переходит через точку $x=1$ из промежутка $(1; 4)$ в соседний слева промежуток $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$ (рис. 110). Тогда значение двучлена $x-1$ с положительного через нулевое становится отрицательным (рис. 111), остальные двучлены $x + \frac{7}{3}$ и $x-4$ при этом сохраняют свои знаки. А поскольку в произведении $\left(x + \frac{7}{3}\right)^3 (x-1)^2 (x-4)$ есть два множителя $x-1$, и каждый из них меняет знак, то знак произведения при этом не изменится. Значит, на промежутке $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$ значения функции y также отрицательны (рис. 112).

Наконец, пусть переменная x переходит через точку $x = -\frac{7}{3}$ из промежутка $\left(-\frac{7}{3}; 1\right)$ в соседний слева промежуток

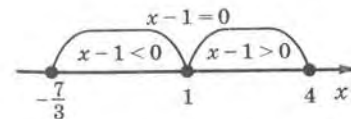


Рис. 111



Рис. 112

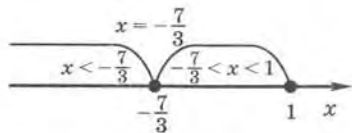


Рис. 113

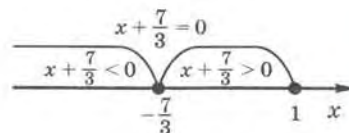


Рис. 114

$(-\infty; -\frac{7}{3})$ (рис. 113). Тогда значение двучлена $x + \frac{7}{3}$ с положительного через нулевое становится отрицательным (рис. 114), остальные двучлены $x - 1$ и $x - 4$ при этом своих знаков не меняют. Поскольку произведение $(x + \frac{7}{3})^3(x - 1)^2(x - 4)$ содержит три множителя $x + \frac{7}{3}$, и каждый из них меняет знак, то знак произведения при этом изменится. Значит, на промежутке $(-\infty; -\frac{7}{3})$ функция y



Рис. 115

принимает положительные значения (рис. 115).

Учитывая, что в соответствии с условием нас интересуют те промежутки, на которых функция y принимает значения, большие нуля, по окончательному рисунку 115 записываем ответ: $(-\infty; -\frac{7}{3}) \cup (4; +\infty)$.

► В произведение $(x + \frac{7}{3})^3(x - 1)^2(x - 4)$ множители $x + \frac{7}{3}$, $x - 1$ и $x - 4$ входят 3, 2 и 1 раз соответственно. Их называют *кратностями* соответствующих *корней* многочлена: корень $-\frac{7}{3}$ имеет кратность 3, корень 1 — кратность 2, корень 4 — кратность 1.

Обобщая рассуждения, проведенные при решении примера 1, получим следующие теоремы.

Теорема 2. Если число x_0 — наибольший корень многочлена $q(x)$, то значение функции $y = q(x)$ при значении переменной x , большем x_0 , совпадает по знаку со значением старшего коэффициента этого многочлена.

Теорема 3. Если число x_1 — корень многочлена $q(x)$ нечетной кратности, то график функции $y = q(x)$ пересекает ось абсцисс в точке $B(x_1; 0)$, при переходе через которую функция меняет свой знак на противоположный.

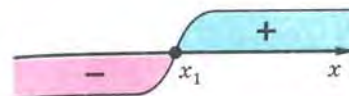


Рис. 116

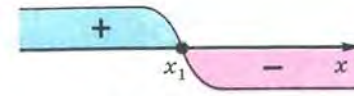


Рис. 117

Теорема 4. Если число x_2 — корень многочлена $q(x)$ четной кратности, то график функции $y = q(x)$ касается оси абсцисс в точке $C(x_2; 0)$ и при переходе через нее функция сохраняет свой знак.

Рисунки 116 и 117 показывают, как меняется знак значения функции $y = q(x)$ при переходе через корень x_1 нечетной кратности, а рисунки 118 и 119 — при переходе через корень x_2 четной кратности.

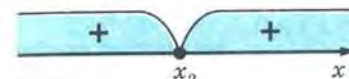


Рис. 118



Рис. 119

Теоремы 2, 3 и 4 обосновывают один из методов решения рациональных неравенств, который называют *методом интервалов*.

Пример 2. Решим неравенство $(3x + 7)^3(x - 1)^2(x - 4) \leq 0$.

Это неравенство отличается от неравенства из примера 1 положительным множителем 3^3 и знаком неравенства. Поэтому можно использовать уже полученный рисунок 115. Теперь нас интересуют те значения аргумента x функции $y = (3x + 7)^3(x - 1)^2(x - 4)$, при которых она имеет неположительные значения. Эти значения образуют множество $[-\frac{7}{3}; 4]$.

Теорема 5. Неравенство вида $\frac{q(x)}{r(x)} \geq 0$, где $q(x)$ и $r(x)$ — некоторые выражения с переменной x , равносильно системе неравенств $\begin{cases} q(x) \cdot r(x) \geq 0, \\ r(x) \neq 0. \end{cases}$

► **Доказательство.** Пусть дано неравенство $\frac{q(x)}{r(x)} \geq 0$, и x_0 — его решение. Тогда истинны утверждения $\frac{q(x_0)}{r(x_0)} \geq 0$ и $r(x_0) \neq 0$.

Умножив обе части неравенства $\frac{q(x_0)}{r(x_0)} \vee 0$ на положительное число $(r(x_0))^2$, получим истинное неравенство $q(x_0) \cdot r(x_0) \vee 0$. Таким образом, каждое решение x_0 исходного неравенства

$$\frac{q(x)}{r(x)} \vee 0 \text{ является решением системы } \begin{cases} q(x) \cdot r(x) \vee 0, \\ r(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пусть теперь число x_1 — решение системы $\begin{cases} q(x) \cdot r(x) \vee 0, \\ r(x) \neq 0. \end{cases}$

Тогда истинны утверждения $q(x_1) \cdot r(x_1) \vee 0$ и $r(x_1) \neq 0$. Разделив обе части числового неравенства на положительное число $(r(x_1))^2$, получим истинное неравенство $\frac{q(x_1)}{r(x_1)} \vee 0$. Получили,

что каждое решение системы $\begin{cases} q(x) \cdot r(x) \vee 0, \\ r(x) \neq 0 \end{cases}$ является решением

неравенства $\frac{q(x)}{r(x)} \vee 0$. Этим доказательство теоремы завершено. ◀

Равносильность утверждений A и B выражают записью $A \equiv B$. Учитывая это, утверждение теоремы 5 можно записать так:

$$\frac{q(x)}{r(x)} \vee 0 \equiv \begin{cases} q(x) \cdot r(x) \vee 0, \\ r(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример 3. Решим неравенство $\frac{t^2 + 2t - 15}{3t^2 + 5t - 8} \leq 0$.

Будем иметь:

$$\frac{t^2 + 2t - 15}{3t^2 + 5t - 8} \leq 0 \equiv \begin{cases} (t^2 + 2t - 15)(3t^2 + 5t - 8) \leq 0, \\ 3t^2 + 5t - 8 \neq 0 \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} (t + 5)(t - 3)\left(t + \frac{8}{3}\right)(t - 1) \leq 0, \\ t \neq -\frac{8}{3}, \\ t \neq 1. \end{cases}$$

Получив рисунок 120, выписываем ответ: $\left[-5; -\frac{8}{3}\right) \cup (1; 3]$.

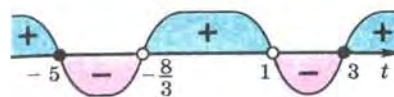


Рис. 120

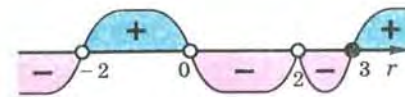


Рис. 121

Пример 4. Решим неравенство $\frac{r-4}{r^2+2r} + \frac{1}{2r-r^2} \leq \frac{2}{4-r^2}$.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{r-4}{r^2+2r} + \frac{1}{2r-r^2} - \frac{2}{4-r^2} &\leq 0 \equiv \frac{r-4}{r(r+2)} - \frac{1}{r(r-2)} + \frac{2}{(r+2)(r-2)} \leq 0 \equiv \\ &\equiv \frac{(r-4)(r-2) - (r+2) + 2r}{r(r+2)(r-2)} \leq 0 \equiv \frac{r^2 - 6r + 8 - r - 2 + 2r}{r(r+2)(r-2)} \leq 0 \equiv \\ &\equiv \frac{r^2 - 5r + 6}{r(r+2)(r-2)} \leq 0 \equiv \frac{(r-2)(r-3)}{r(r+2)(r-2)} \leq 0 \equiv \\ &\equiv \begin{cases} (r+2)r(r-2)^2(r-3) \leq 0, \\ r \neq -2, r \neq 0, r \neq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Получив рисунок 121, получаем возможность выписать ответ:

$$(-\infty; -2) \cup (0; 2) \cup (2; 3].$$

Пример 5. Решим систему:

$$\text{а) } \begin{cases} 24 + 2a - a^2 \geq 0, \\ 5 - a < 4 - 3a; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} b^2 + 3 \leq 4b, \\ 5b + 24 > b^2. \end{cases}$$

а) Имеем:

$$\begin{cases} 24 + 2a - a^2 \geq 0, \\ 5 - a < 4 - 3a \end{cases} \equiv \begin{cases} a^2 - 2a - 24 \leq 0, \\ 2a < -1 \end{cases} \equiv \begin{cases} (a+4)(a-6) \leq 0, \\ a < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Изобразив решения неравенств системы рисунком 122, записываем ответ:

$$\left[-4; -\frac{1}{2}\right).$$

б) Имеем:

$$\begin{cases} b^2 + 3 \leq 4b, \\ 5b + 24 < b^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} b^2 - 4b + 3 \leq 0, \\ b^2 - 5b - 24 > 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (b-1)(b-3) \leq 0, \\ (b+3)(b-8) > 0. \end{cases}$$

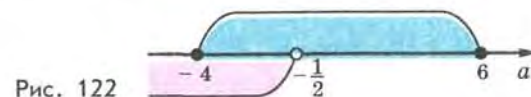


Рис. 122

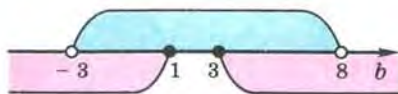


Рис. 123

По рисунку 123, на котором изображены решения первого и второго неравенств последней системы, записываем ответ:

$$(-3; 1] \cup [3; 8).$$

1. Какое неравенство называется рациональным?
 2. Какими по знаку являются значения функции $y = q(x)$, где $q(x)$ — многочлен, при значениях переменной, больших наибольшего корня многочлена $q(x)$?
 3. Что происходит со значениями функции $y = q(x)$, где $q(x)$ — многочлен, при переходе переменной x через корень нечетной кратности; корень четной кратности?

200. Решите неравенство:

- а) $(x+3)(x-5) > 0$; г) $(x+3)(x-5) \geq 0$;
 б) $(x+3)(x-5) \leq 0$; д) $(x+3)(x-5) \neq 0$;
 в) $(x+3)(x-5) < 0$; е) $(x-3)(x-5) > 0$.

201. Решите неравенство:

- а) $(b+4)(b-5)(b-9) > 0$; г) $(b+4)b(b-9) \geq 0$;
 б) $(b+4)(b-5)(b-10) \leq 0$; д) $(b+3)(b+1)(b-4) \neq 0$;
 в) $(b+4)(b-1)(b-9) < 0$; е) $(b+8)(b+5)(b+1) > 0$.

202. Укажите те значения аргумента x , при которых значения функции $y = (x+3)(x-2)^2(x+1)^3(x-4)^4$ являются:

- а) отрицательными; г) неотрицательными;
 б) положительными; д) неположительными;
 в) равными нулю; е) не равными нулю.

203. Решите неравенство:

- а) $(a+1)^2(a-6) > 0$; г) $(a+1)^2(a-6) \geq 0$;
 б) $(a+1)^3(a-6) \leq 0$; д) $(a+1)^3(a-6) < 0$;
 в) $(a+1)^2(a-6) \neq 0$; е) $(a+1)^3(a-6) > 0$.

204. Решите неравенство:

- а) $(x+3)^3(x-7)^2(x-1) > 0$; г) $(v+4)^3v^4(v-9)^5 \geq 0$;
 б) $(y+4)(y-5)^4(y-10)^2 \leq 0$; д) $(u+3)^2(u+1)^4(u-4)^6 < 0$;
 в) $(z+4)^2(z-1)^3(z-9)^4 < 0$; е) $(w+8)^3(w+5)^5(w+1)^7 > 0$.

205. Решите неравенство:

- а) $(2m+3)^2(3m-6)^3(4m-1)^2 > 0$;
 б) $(3n+4)^3(5n-5)^4(10-5n)^2 \leq 0$;
 в) $(4+6p)^2(2p-1)^5(6p-9)^4 < 0$;
 г) $(3q+4)(4-3q)^3(12q-9)^5 \geq 0$;
 д) $(r+3)^2(7r+1)^6(6r-12)^6 < 0$;
 е) $(8-4s)^3(3s+5)^7(1-6s)^3 > 0$.

206. Решите неравенство:

- а) $(2x+8)(3x-2)(5-2x)(3+3x) > 0$;
 б) $(2y+8)(3y-2)^3(5-2y)^5(3+3y)^7 \leq 0$;
 в) $(2z+8)^2(3z-2)^4(5-2z)^6(3+3z)^8 < 0$;
 г) $(2a+8)^2(3a-2)^3(5-2a)^4(3+3a)^5 \geq 0$;
 д) $(2c+8)^3(3c-2)^5(5-2c)^2(3+3c)^8 < 0$;
 е) $(2e+8)^6(3e-2)(5-2e)^3(3+3e) > 0$.

207. Решите неравенство:

- а) $e^3 - 25e > 0$; е) $(j-3)(j^2-121) \geq 0$;
 б) $9f^3 - f \leq 0$; ж) $(k^3-1)(k+4) > 0$;
 в) $108g^3 - 3g < 0$; з) $(l^3+8)(l-3) \leq 0$;
 г) $(h^2-1)(h+3) \geq 0$; и) $(m^3+27)(m+6) > 0$;
 д) $(i^2-49)(i-5) < 0$; к) $(t^k+16)(t^2-9) < 0$.

208. Решите неравенство:

- а) $(j-7)(j-2)(j^2-9) > 0$;
 б) $(k+3)(k-4)(k^2-16) \leq 0$;
 в) $(l-4)(l+7)(l^2-49) < 0$;
 г) $(m+6)m(m^3-216) \geq 0$;
 д) $(n^2-169)(n+13)(n-13) < 0$;
 е) $(q^3+8)(q^2-2)(q+2) > 0$.

209. Решите неравенство:

- а) $(r-1)^2(r^2-2) < (r-1)^2(6-2r)$;
 б) $(s-1)^3(s-2)(2s-3) < (s-1)^3(s-2)^2$;
 в) $(t-4)^3(t^2-10t+25) \geq (t-4)^3(5-t)$;
 г) $(u-1)(2u-4)(u-3)^2 \leq (u^2-3u+2)(u-3)^2$;
 д) $(v^2-4v+4)(3v^2-2v-1) \leq 0$;
 е) $(9w^2-6w+1)(w^2-6w+8) > 0$;
 ж) $(x^2+x)^2(7x^2-5x-2) \geq 0$;
 з) $(5y^2+6y+1)(y^4-4y^3+4y^2) \leq 0$.

210. Решите неравенство:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{a+3}{a-5} > 0; & \text{г) } \frac{1,2d+4}{d-2} \geq 0; & \text{ж) } \frac{(2g+1)(g+1)}{(g-2)} > 0; \\ \text{б) } \frac{b-1}{b+4} \leq 0; & \text{д) } \frac{3e+6}{4e-12} < 0; & \text{з) } \frac{(h+1)(h-3)}{(h+2)} \leq 0; \\ \text{в) } \frac{\frac{1}{3}c+1}{c+7} \geq 0; & \text{е) } \frac{3f-1}{4f-3} \geq 0; & \text{и) } \frac{(2i-1)}{(i-2)(i-1)} > 0. \end{array}$$

211. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{(k+3)(k-2)}{k-1} \leq 0; & \text{г) } \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)^2} \geq 0; \\ \text{б) } \frac{(e+1)^3}{(e-3)(e-5)} \geq 0; & \text{д) } \frac{(p+8)^4(1-p)^3}{(p+5)(p-2)^2} \geq 0; \\ \text{в) } \frac{(m+6)^3(m-4)}{(7-m)^5} < 0; & \text{е) } \frac{-(g+4)^4}{g^2(g-4)^6} \geq 0. \end{array}$$

212. Решите неравенство:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{a^2-2a+3}{(a-2)^2} \leq 0; & \text{в) } \frac{c^2-c}{c^2-9} > 0; & \text{д) } \frac{l^3-8}{l^2-5l+6} < 0; \\ \text{б) } \frac{(b+4)^2}{2b^2-3b+1} \geq 0; & \text{г) } \frac{9d^2-4}{d-2d^2} \leq 0; & \text{е) } \frac{f^3+27}{2f^2-3f-9} \geq 0. \end{array}$$

213. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{r^2-r-12}{r-1} > 0; & \text{д) } \frac{q^2-4q-12}{q-2} < 0; \\ \text{б) } \frac{r^2+3r-10}{r^2+r-2} \leq 0; & \text{е) } \frac{s^2-3s-4}{s^2+s-6} \geq 0; \\ \text{в) } \frac{3t^2-5t-8}{2t^2-5t-3} > 0; & \text{ж) } \frac{4u^2+u-3}{5u^2+9u-2} < 0; \\ \text{г) } \frac{2+7v-4v^2}{3v^2+2v-1} \leq 0; & \text{з) } \frac{2+9w-5w^2}{3w^2-2w-1} \geq 0. \end{array}$$

214. Решите неравенство:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{3x+2}{x-3} > 1; & \text{г) } \frac{5x-4}{2x-3} > 2; & \text{ж) } \frac{6x+1}{5x+3} < \frac{7}{8}; \\ \text{б) } \frac{5x+4}{x-2} > 1; & \text{д) } \frac{7x-9}{2x+6} < -1; & \text{з) } \frac{3x-2}{5x+1} < 2; \\ \text{в) } \frac{0,5x+7}{2x+3} < 1; & \text{е) } \frac{3x-1}{x-5} > 2; & \text{и) } \frac{-x+3}{2x+1} < -\frac{3}{4}. \end{array}$$

215. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{a}{a-2} + \frac{3}{a} > \frac{3}{a-2}; & \text{г) } \frac{b^2}{b^2+3b} + \frac{2-b}{b+3} < \frac{5-b}{b}; \\ \text{б) } \frac{2}{c-\sqrt{2}} > \frac{3}{c+\sqrt{2}}; & \text{д) } \frac{\sqrt{3}}{3-d^2} < \frac{2}{\sqrt{3}-d}; \\ \text{в) } \frac{9}{2e+2} + \frac{e}{e-1} \geq \frac{1-3e}{2-2e}; & \text{е) } \frac{3}{f^2-1} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2f-2}. \end{array}$$

216. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{3e^2+10e+3}{(3-e)^2(4-e^2)} > 0; & \text{в) } \frac{f^2(6-f)^3(f+4)}{(f+7)^5} \geq 0; \\ \text{б) } \frac{(r-1)^3}{(5r+10)^2(-1-3r)} < 0; & \text{г) } \frac{(1-2s)^3(3-2s)^4}{(2s-5)^5} \leq 0. \end{array}$$

217. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{14a(2a+3)}{a+1} < \frac{(9a-30)(2a+3)}{a-4}; & \\ \text{б) } \frac{(5c+4)(3c-2)}{c+3} \leq \frac{(3c-2)(c+2)}{1-c}; & \\ \text{в) } \frac{(e+5)(3e^2-3e+1)}{e^2-6e+9} > \frac{(e+5)(e^2+2e-1)}{e^2-6e+9}; & \\ \text{г) } \frac{(g^2-6g+9)(3g^2-2g-1)}{5-g} \leq \frac{(g^2-6g+9)(2+2g-4g^2)}{5-g}. & \end{array}$$

218. Укажите те значения аргумента x , при которых график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{3x-1}{3x+1} \text{ расположен выше графика функции } y = \frac{x+9}{x+3}; & \\ \text{б) } y = \frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1} \text{ расположен не выше графика функции } & \\ y = \frac{12}{1-9x^2}. & \end{array}$$

219. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} a^2 + a - 6 \leq 0, \\ a^2 + 6a + 5 > 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} c^2 - 2c - 35 \leq 0, \\ c^2 + 10c + 9 \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} b^2 - 8b + 7 \geq 0, \\ b^2 - 2b - 8 > 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} d^2 + 9d + 8 \leq 0, \\ d^2 + 7d - 18 > 0. \end{cases} \end{array}$$

220. Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} -5m^2 + 3m + 2 \geq 0, \\ m > 0; \end{cases} & \quad \text{в) } \begin{cases} p^2 + p - 6 < 0, \\ -p^2 + 2p + 3 > 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 2n^2 + 5n + 4 > 0, \\ n \geq 0; \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} g^2 + 4g - 5 > 0, \\ g^2 - 2g - 8 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

221. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 0 < 4a^2 + 4a < 3; & \quad \text{в) } 0 < c^2 - 3c + 2 < 6; \\ \text{б) } 8 < b^2 - 6b + 8 < 15; & \quad \text{г) } 5 < d^2 - 8d + 25 < 18. \end{aligned}$$

222. Решите систему неравенств:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0; \end{cases} & \quad \text{в) } \begin{cases} 3y^2 - 4y + 1 > 0, \\ 3y^2 - 5y + 2 \leq 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{2-z}{z+1} \geq 1, \\ \frac{2-z}{z+1} \leq 2; \end{cases} & \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{3w^2 - 7w + 8}{w^2 + 1} > 1, \\ \frac{3w^2 - 7w + 8}{w^2 + 1} \leq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

223. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } g^4 - 12g^2 + 36 > 0; & \quad \text{в) } e^4 - 13e^2 + 36 \leq 0; \\ \text{б) } 16h^4 - 24h^2 + 9 \leq 0; & \quad \text{г) } f^4 - 2f^2 - 15 \geq 0. \end{aligned}$$

224. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(\frac{x^2 - 2x}{x+1} \right)^2 > 0; & \quad \text{в) } (t-3)^2 + \frac{1}{t^2 - 6t + 9} > 2; \\ \text{б) } \frac{1}{(t-2)^2} - \frac{6}{t-2} + 9 > 0; & \quad \text{г) } a^2 + \frac{a^2 - 8a + 16}{a^2 - 2a + 1} > \frac{8a - 2a^2}{a-1}. \end{aligned}$$

225. Решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 < 0; \\ \text{б) } x^5 + 7x^4 + 15x^3 + 9x^2 - 49x - 49 \geq 0; \\ \text{в) } \frac{x(x-1)^2}{(x^2 - x + 1)^2} \leq \frac{2}{9}; \\ \text{г) } \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 4 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 3 < 0; \\ \text{д) } \frac{24}{x^2 - 2x} > \frac{12}{x^2 - x} + x^2 - x; \\ \text{е) } \frac{4x+7}{x+1} + \frac{1-3x}{x+2} > \frac{8-2x}{x-1} + 3. \end{aligned}$$

226. Найдите вписанный угол AMB , который на 47° меньше соответствующего центрального угла AOB .

227. Стороны вписанного в окружность угла отсекают от нее дуги в 111° и 41° . Найдите этот вписанный угол.

228. Используя график функции $A = 4c^2 - 12c + 9$, изображенный на рисунке 124, решите неравенство:

$$\begin{aligned} \text{а) } 4c^2 - 12c + 9 < 0; & \quad \text{в) } 4c^2 - 12c + 9 > 0; \\ \text{б) } 4c^2 - 12c + 9 \leq 0; & \quad \text{г) } 4c^2 - 12c + 9 \geq 0. \end{aligned}$$

229. Основания PS и QR трапеции $PQRS$ соответственно равны 11 и 5. Через точку A боковой стороны PQ , которая делит ее в отношении $7:5$, если считать от точки P , проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок AB этой прямой, заключенный внутри трапеции.

230. Окружность $x^2 + y^2 = 169$ пересекает прямую $y = x - 7$ в точках A и B , расположенных соответственно в третьей и первой координатных четвертях (рис. 125). Найдите:

- угол, который образует луч OB с осью абсцисс;
- угол, который образует луч OA с осью ординат;
- угол между лучами OA и OB ;
- площадь треугольника AOB ;
- длину дуги ACB , где C — точка окружности, расположенная в четвертой четверти;
- площадь сектора $OACB$;
- площадь сегмента ABC .

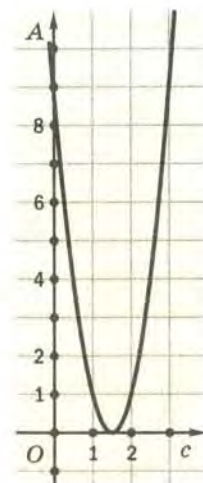


Рис. 124

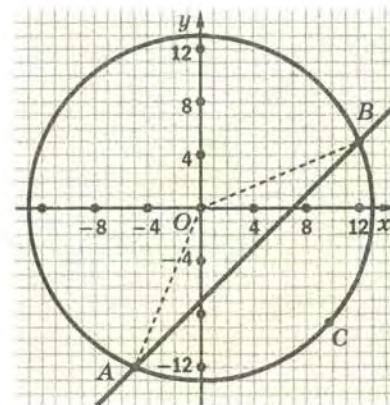


Рис. 125



Рис. 126



Рис. 127



Рис. 128



Рис. 129

231. Белка (рис. 126), суслик (рис. 127), сурок (рис. 128), бурундук (рис. 129) — млекопитающие семейства беличьих, из которых два первых живут на территории нашей страны. Если бы длина тела бурундука была меньше на 2 см, а длины тел суслика и белки больше на 4 см и 1 см соответственно, то эти длины и длина тела сурка относились бы как 1 : 2 : 2 : 4. Найдите длины тел бурундука, суслика, белки и сурка, учитывая, что суслик длиннее бурундука на 9 см.

232. Массы тел сурка, суслика, бурундука относятся как 103 : 3 : 1, а белки и сурка — как 21 : 515. Найдите эти массы, учитывая, что белка тяжелее суслика на 120 г.

* * *

233. На сторонах треугольника ABC взяты точки M, N, K так, что $\angle BMN = \angle CKN$, $\angle BNM = \angle AKM$, $\angle AMK = \angle CNK$ (рис. 130). Докажите, что точки M, N, K — середины сторон.

234. Докажите, что если натуральные числа m и n удовлетворяют неравенству $\frac{m}{n} < \sqrt{5}$, то они удовлетворяют и не-

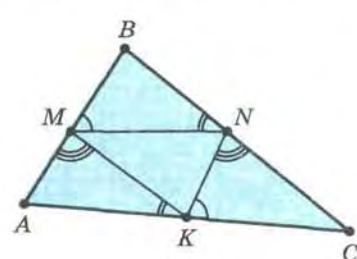


Рис. 130

равенству $\sqrt{5} - \frac{m}{n} > \frac{1}{4mn}$.

235. На поверхности куба проведена замкнутая ломаная из восьми звеньев, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпадать с ребрами куба?

7*. Квадратные неравенства с параметрами

Как вы уже знаете, неравенство с параметрами можно рассматривать как краткую запись множества неравенств определенного вида.

Решить неравенство с параметрами означает для каждого набора значений параметров найти решения соответствующего неравенства.

Пример 1. Неравенство $ax^2 + bx + c \leq 0$, где параметрами являются переменные a, b, c , решается так, как показано на рисунке 131.

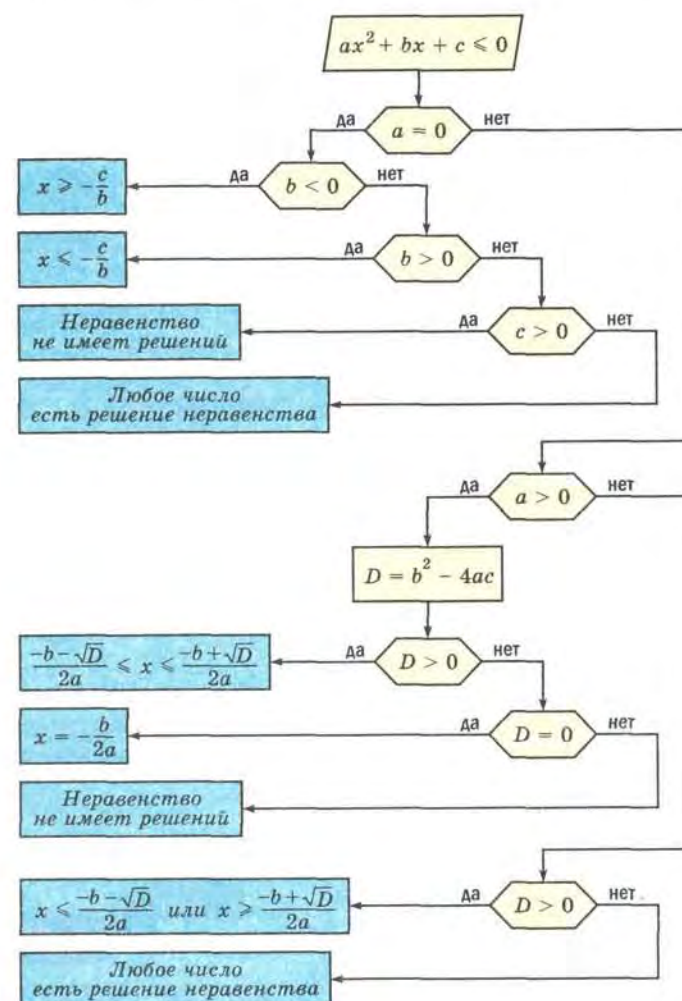


Рис. 131

Отвѣт. Если $a = 0$, $b < 0$ и c — любое число, то $x \geq -\frac{c}{b}$;

если $a = 0$, $b > 0$ и c — любое число, то $x \leq -\frac{c}{b}$;

если $a = 0$, $b = 0$ и $c > 0$, то неравенство не имеет решений;

если $a = 0$, $b = 0$ и $c \leq 0$, то любое число — решение неравенства;

если $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq x \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

если $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$;

если $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то неравенство не имеет решений;

если $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то $x \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ или $x \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

если $a < 0$ и $b^2 - 4ac = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$;

если $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$, то любое число — решение неравенства.

Пример 2. Решим неравенство $(m^2 - m - 2)x^2 - 6(m - 1)x - 1 \leq 0$ с параметром m .

Для решения этого неравенства нужно знать знаки дискриминанта и старшего коэффициента трехчлена $(m^2 - m - 2)x^2 - 6(m - 1)x - 1$.

Найдем дискриминант D и определим, как меняется его знак:

$$\begin{aligned} D &= (6(m - 1))^2 + 4(m^2 - m - 2) = \\ &= 36m^2 - 72m + 36 + 4m^2 - 4m - 8 = \\ &= 40m^2 - 76m + 28 = 4(10m^2 - 19m + 7); \\ m &= \frac{19 \pm \sqrt{361 - 280}}{20} = \frac{19 \pm 9}{20}; m_1 = \frac{1}{2}; m_2 = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Изменение знака дискриминанта D показано на рисунке 132.



Рис. 132

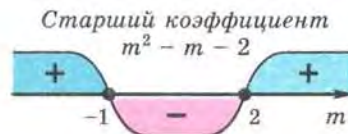


Рис. 133

Определим, как меняется знак старшего коэффициента $m^2 - m - 2$:

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; m_3 = -1; m_4 = 2.$$

Изменение знака старшего коэффициента показано на рисунке 133.

Для удобства дальнейших рассуждений распределение знаков дискриминанта и старшего коэффициента покажем на одной координатной прямой рисунком 134.



Рис. 134

Найдем корни трехчлена $(m^2 - m - 2)x^2 - 6(m - 1)x - 1$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3(m - 1) \pm \sqrt{(3(m - 1))^2 + m^2 - m - 2}}{m^2 - m - 2} = \frac{3(m - 1) \pm \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}; \\ x_1 &= \frac{3(m - 1) - \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}; x_2 = \frac{3(m - 1) + \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}. \end{aligned}$$

Пусть $m < -1$ или $m > 2$. Тогда распределение знаков значений квадратного трехчлена представляет рисунок 135. Это позволяет записать решения данного неравенства при рассматриваемых значениях параметра: $x_1 \leq x \leq x_2$.

Пусть $-1 < m < \frac{1}{2}$ или $\frac{5}{7} < m < 2$. Тогда распределение знаков значений квадратного трехчлена представляет рисунок 136. Решениями неравенства будут такие числа x , что $x \leq x_2$ или $x \geq x_1$.



Рис. 135

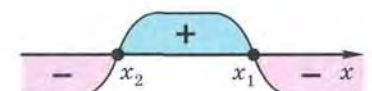


Рис. 136



Рис. 137

Пусть $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{7}$. Тогда распределение знаков значений квадратного трехчлена представляет рисунок 137. Получаем, что при таких значениях параметра решением неравенства является любое число.

Пусть $m = \frac{1}{2}$ или $m = \frac{5}{7}$. Тогда распределение знаков значений квадратного трехчлена представляет рисунок 138. Решением неравенства является любое число, кроме числа $\frac{3(m-1)}{m^2-m-2}$.

Пусть $m = -1$. Тогда данное неравенство становится неравенством $12x - 1 \leq 0$, которое равносильно неравенству $x \leq \frac{1}{12}$.

Пусть $m = 2$. Тогда данное неравенство становится неравенством $-6x - 1 \leq 0$, которое равносильно неравенству $x \geq -\frac{1}{6}$.

Ответ. Если $m < -1$ или $m > 2$, то $\frac{3(m-1) - \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2} \leq x \leq \frac{3(m-1) + \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}$;

если $-1 < m < \frac{1}{2}$ или $\frac{5}{7} < m < 2$, то $x \geq \frac{3(m-1) - \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}$ или $x \leq \frac{3(m-1) + \sqrt{10m^2 - 19m + 7}}{m^2 - m - 2}$;

если $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{7}$, то x — любое число;

если $m = \frac{1}{2}$ или $m = \frac{5}{7}$, то x — любое число, кроме числа $\frac{3(m-1)}{m^2 - m - 2}$;

если $m = -1$, то $x \leq \frac{1}{12}$;

если $m = 2$, то $x \geq -\frac{1}{6}$.

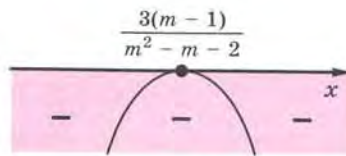


Рис. 138

Неравенства, в том числе и квадратные, приходится решать при исследовании квадратного трехчлена.

Пример 3. Найдем те значения параметра l , при которых уравнение

$$t^2 - 2\sqrt{3}(l-2)t + l^2 - l = 0$$

имеет корни.

Условием существования корней квадратного уравнения является неотрицательность его дискриминанта:

$(\sqrt{3}(l-2))^2 - (l^2 - l) \geq 0$. Решим полученное неравенство:

$$3(l^2 - 4l + 4) - (l^2 - l) \geq 0;$$

$$3l^2 - 12l + 12 - l^2 + l \geq 0;$$

$$2l^2 - 11l + 12 \geq 0;$$

$$l \leq \frac{3}{2} \text{ или } l \geq 4.$$

Ответ. Уравнение имеет корни, если $l \leq \frac{3}{2}$ или $l \geq 4$.

Пример 4. Определим, какие знаки имеют корни уравнения

$$t^2 - 2\sqrt{3}(l-2)t + l^2 - l = 0$$

в зависимости от значений параметра l .

Данное квадратное уравнение имеет два корня, когда его дискриминант D положителен, т. е. когда $2l^2 - 11l + 12 > 0$.

Поскольку старший коэффициент 1 уравнения положителен, то, в соответствии с теоремой Виета, эти корни имеют одинаковые знаки, если свободный член положителен, т. е. если $l^2 - l > 0$. Наконец, в соответствии с теоремой Виета, эти корни положительны, когда второй коэффициент уравнения отрицателен, т. е. если $-2\sqrt{3}(l-2) < 0$. Таким образом, оба корня уравнения положительны, когда истинна система неравенств

$$\begin{cases} 2l^2 - 11l + 12 > 0, \\ l^2 - l > 0, \\ -2\sqrt{3}(l-2) < 0. \end{cases}$$

Решения этой системы составляют множество $(4; +\infty)$.

Оба корня данного уравнения отрицательны, если истинна система неравенств

$$\begin{cases} 2l^2 - 11l + 12 > 0, \\ l^2 - l > 0, \\ -2\sqrt{3}(l-2) < 0, \end{cases}$$

решения которой образуют множество $(-\infty; 0) \cup (1; \frac{3}{2})$.

Корни данного уравнения имеют разные знаки, когда его свободный член отрицателен, т. е. когда $l^2 - l < 0$. При этом больший модуль имеет положительный корень t_2 , если второй коэффициент уравнения отрицателен, т. е. когда $-2\sqrt{3}(l-2) < 0$.

Таким образом, уравнение имеет корни разных знаков, причем больший модуль имеет положительный корень x_2 , когда истинна система неравенств

$$\begin{cases} 2l^2 - 11l + 12 > 0, \\ l^2 - l < 0, \\ -2\sqrt{3}(l-2) < 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

Уравнение имеет корни разных знаков, причем больший модуль имеет отрицательный корень x_1 , когда истинна система неравенств

$$\begin{cases} 2l^2 - 11l + 12 > 0, \\ l^2 - l < 0, \\ -2\sqrt{3}(l-2) > 0. \end{cases}$$

Решения этой системы составляют множество $(0; 1)$.

Уравнение имеет различные корни, один из которых нулевой, когда истинна система условий

$$\begin{cases} 2l^2 - 11l + 12 > 0, \\ l^2 - l = 0, \end{cases}$$

решениями которой являются числа 0 и 1. В этих случаях получаются уравнения $t^2 + 4\sqrt{3}t = 0$ и $t^2 + 2\sqrt{3}t = 0$, меньшие корни которых $-4\sqrt{3}$ и $-2\sqrt{3}$ оба отрицательны, а большие оба равны нулю.

Уравнение имеет равные корни, когда $2l^2 - 11l + 12 = 0$, т. е. когда $l = \frac{3}{2}$ и когда $l = 4$. В первом случае получается уравнение $t^2 + \sqrt{3}t + \frac{3}{4} = 0$, для которого $t_1 = t_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, во втором — уравнение $t^2 - 4\sqrt{3}t + 12 = 0$, для которого $t_1 = t_2 = 2\sqrt{3} > 0$.

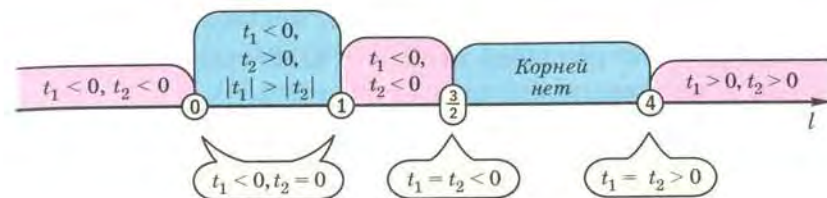


Рис. 139

Наконец, уравнение не имеет корней, когда $2l^2 - 11l + 12 < 0$, т. е. если $\frac{3}{2} < l < 4$.

Чтобы выписать ответ, представим результат решения рисунком 139.

Ответ. Если $l < 0$ или $1 < l < \frac{3}{2}$, то $t_1 < 0$ и $t_2 < 0$;

если $l = 0$ или $l = 1$, то $t_1 < 0$ и $t_2 = 0$;

если $0 < l < 1$, то $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$; и $|t_1| > |t_2|$;

если $l = \frac{3}{2}$, то $t_1 = t_2 < 0$;

если $\frac{3}{2} < l < 4$, то корней нет;

если $l = 4$, то $t_1 = t_2 > 0$;

если $l > 4$, то $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$.

Пример 5. Определим, при каких значениях параметра p один корень квадратного трехчлена $s^2 - (2p+3)s + 3p-2$ меньше 2, а второй больше 2.

Обратим внимание на то, что графиком функции $z = s^2 - (2p+3)s + 3p-2$ является парабола с ветвями, направленными вверх. В соответствии с условием этот график должен пересекать ось абсцисс в двух точках с абсциссами s_1 и s_2 , причем промежуток $(s_1; s_2)$ должен содержать число 2 (рис. 140). Поэтому при значении переменной s , равном 2, квадратный трехчлен $s^2 - (2p+3)s + 3p-2$ должен принимать отрицательное значение. Понятно, что и наоборот, если при s , равном 2, квадратный трехчлен $s^2 - (2p+3)s + 3p-2$ принимает отрицательное значение, то одна ветвь параболы пересечет ось абсцисс в точке s_1 , меньшей 2, а вто-

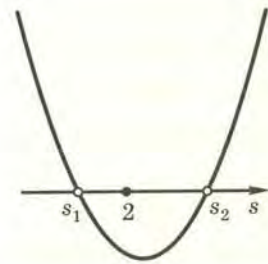


Рис. 140

рая — в точке s_2 , большей 2. Значит, искомые значения параметра p — это решения неравенства $2^2 - (2p + 3) \cdot 2 + 3p - 2 < 0$, т. е. числа промежутка $(-4; +\infty)$.

Ответ. $p > -4$.

1. Что означает требование *Решить неравенство с параметрами*?
2. Укажите распределение знаков значений квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, когда его старший коэффициент a положителен и дискриминант D : отрицателен; равен нулю; положителен.
3. Укажите распределение знаков значений квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, когда его старший коэффициент a отрицателен и дискриминант D : отрицателен; равен нулю; положителен.

236. Решите неравенство:

- а) $t^2 - 2t + p > 0$, где p — параметр;
 б) $s^2 + 2gs + 3 \leq 0$, где g — параметр;
 в) $2x^2 + rx + 4 \geq 0$, где r — параметр;
 г) $z^2 - (2 + c)z + 4 > 0$, где c — параметр.

237. Установите в зависимости от параметра a , при каких значениях переменной t значение функции $f_1(t) = (2a - 1)t^2 + (7a + 2)t - 3a$ больше значения функции $f_2(t) = (a + 3)t^2 + 5(a + 1)t - 4(a + 1)$.

238. Решите неравенство:

- а) $z^2 + 2z + a > 0$, где a — параметр;
 б) $t^2 + 2t + k < 0$, где k — параметр;
 в) $x^2 - 5x - l \leq 0$, где l — параметр;
 г) $t^2 + mt + 8m - 15 \geq 0$, где m — параметр.

239. Решите неравенство:

- а) $x^2 + 2(c + 1)x + 9c - 5 > 0$, где c — параметр;
 б) $y^2 + 6y + (5b - 1)(b - 1) \geq 0$, где b — параметр;
 в) $x^2 + (2k + 3)x + k^2 + 4k + 3 \leq 0$, где k — параметр;
 г) $z^2 - 2(4m - 1)z + 15m^2 - 2m - 7 \geq 0$, где m — параметр.

240. Решите неравенство:

- а) $by^2 + by - 4 < 0$, где b — параметр;
 б) $(d + 2)t^2 + 2t + d \geq 1$, где d — параметр;
 в) $(d + 1)x^2 - 2(d + 1)x + 3d - 3 \leq 0$, где d — параметр;
 г) $(a - 1)y^2 + (4a - 3)y + 5a - 3 < 0$, где a — параметр.

241. Решите неравенство:

- а) $x^2 + 8ax + (8a - 1)(2a + 1) > 0$, где a — параметр;
 б) $(b^2 - 7)y^2 + 2(b - 1)y + 2 \leq 0$, где b — параметр;
 в) $(n - 2)t^2 - 6t - 2 < 0$, где n — параметр;
 г) $(k - 1)r^2 - 2(k + 1)r + k - 3 \leq 0$, где k — параметр.

242. Решите неравенство:

- а) $tx^2 + (2t + 1)x + t + 2 \geq 0$, где t — параметр;
 б) $(z + 2)m^2 + 2(z + 1)m + z - 1 > 0$, где z — параметр;
 в) $(p + 2)s^2 - 4(p + 1)s + p + 3 \geq 0$, где p — параметр.

243. Решите неравенство:

- а) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \leq 0$, где m — параметр;
 б) $(5 - y)n^2 - 2(1 - y)n + 2(1 - y) < 0$, где y — параметр;
 в) $(z - 2)k^2 + 2(2z - 3)k + 5z - 6 \geq 0$, где z — параметр.

244. Решите неравенство:

- а) $\frac{y^2 + y - 6}{2n + 1} \leq y + 6(2n - 1)$, где n — параметр;
 б) $s > \frac{t}{s}$, где t — параметр.

245. Найдите те значения параметра m , при которых имеет один корень уравнение:

- а) $mx^2 + (m + 5)x + m + 8 = 0$; б) $(2m - 3)y^2 - 20y + 3 = 0$.

246. Найдите, при каких значениях параметра k квадратный трехчлен является полным квадратом:

- а) $(4k - 3)x^2 - 3(k + 1)x + 2(k + 1)$;
 б) $(6k - 5)y^2 - 5(k - 1)y + 2k - 6$;
 в) $(k - 1)z^2 + 2kz + 3k - 2$;
 г) $3(k + 6)t^2 - 3(k + 3)t + 2k - 3$.

247. Найдите те значения параметра b , при которых уравнение $2(b + 2)z^2 + (b + 3)z + 2b = 0$ имеет не более одного корня.

248. Найдите, при каких значениях параметра g уравнение $gy^2 - 2(g - 1)y + 5 - 3g = 0$ имеет единственный корень, меньший единицы.

249. Найдите, при каких значениях параметра b один корень уравнения $y^2 - (3b + 5)y + 2b - 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1.

250. Найдите те значения параметра n , при которых один корень уравнения $2nz^2 - 2z - (3n + 2)$ больше 2, а другой меньше 2.

251. Найдите те значения параметра c , при которых уравнение $z^2 - 2(c + 3)z - c^2 + 2c - 2 = 0$ имеет два корня, и установите, какие знаки имеют эти корни в зависимости от значения параметра c .

252. Установите те значения параметра m , при которых уравнение имеет два корня, и установите знаки корней в зависимости от параметра m :

- а) $mx^2 - (2m - 4)x^2 + 2m - 7 = 0$;
- б) $(m - 2)y^2 - 2(3m - 1)y + 7m + 1 = 0$;
- в) $(m + 1)z^2 - 2mz + 2m + 3 = 0$.

253. Найдите, при каких значениях параметра a оба корня уравнения $(a + 2)s^2 - (4a + 6)s - 3a - 6 = 0$ больше единицы.

254. Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $r^2 - pr + 2 = 0$ имеет один корень, принадлежащий промежутку $(1; 3)$.

255. Установите, при каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 - 7x + a = 0$ меньше $\frac{a}{a-1}$.

256. Установите, может ли квадратный трехчлен $by^2 - (sb + 1)y + 3(2b + 1)$ принимать положительные значения при любом значении параметра s .

257. Установите, при каких значениях параметра b истинно неравенство $\frac{s^2 + bs - 2}{s^2 - s + 1} < 2$.

258. Найдите те значения параметра m , при которых неравенство $-3 < \frac{t^2 + mt - 2}{t^2 - t + 1} < 2$ истинно при любых значениях переменной t .

259. Найдите множество значений функции $y = \frac{t^2 + 5t - 6}{t^2 - t + 1}$.

260. Площадь треугольника PQR равна 60 м^2 , его сторона PQ — 15 м . Найдите угол P , учитывая, что сторона PR равна 8 м .

261. Перенесите рисунок 141 в тетрадь. Найдите стороны и углы треугольника OAC .

262. Когда через данную точку провели касательную к данной окружности, то оказалось, что эта точка отстоит от точки касания на 20 . Найдите радиус окружности, учитывая, что от данной точки:

- а) самая дальняя точка окружности удалена на 50 ;
- б) самая ближняя точка окружности удалена на 10 .

263. Одна из диагоналей параллелограмма со сторонами 12 и 15 перпендикулярна стороне. Найдите длины диагоналей.

264. Точку P выбрали на отрезке AB длиной 51 см так, что когда на полученных отрезках-частях PA и PB по разные стороны от прямой AB построили два параллелограмма $APQR$ и $BPNM$ с площадями 420 см^2 и 252 см^2 , то их вершины Q и N оказались на расстоянии 26 см друг от друга (рис. 142). Найдите стороны этих параллелограммов, учитывая, что прямая QN перпендикулярна отрезку PB и пересекает его в такой точке C , что $PC : CB = 1 : 2$.

265. На отрезке MN длиной 30 м выбрали точку A . На части AM построили многоугольник с равными сторонами и периметром, равным 144 м , а на части AN — еще один многоугольник также с равными сторонами и периметром, равным 84 м (рис. 143). Найдите количество сторон каждого из многоугольников, учитывая, что вместе эти количества дают число 15 .

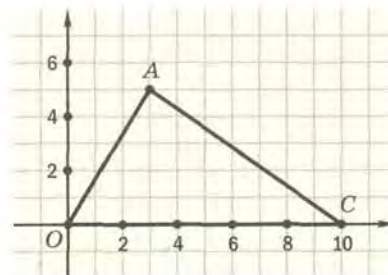


Рис. 141

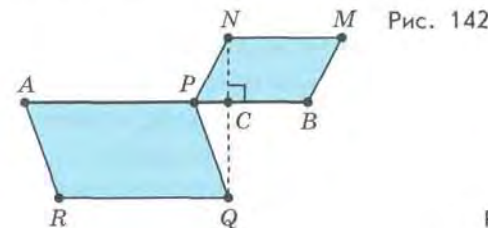


Рис. 142

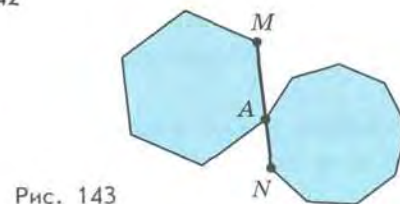


Рис. 143



Рис. 144

266. В 8 ч из Трибутишек выехал один велосипедист. Когда он прибыл в Опсу, сюда из Браслава выехал другой велосипедист, который был на месте в 11 ч 20 мин (рис. 144). Найдите скорости велосипедистов, учитывая, что если бы они ехали одновременно навстречу друг другу, то за час сближались бы на 31 км.

* * *

267. На плоскости отмечены точки A, B, C, D так, что для любой точки M плоскости истинно условие $MA + MB \geq MC + MD$. Что можно утверждать о взаимном расположении точек A, B, C, D ?

268. Докажите, что графики всех квадратных функций $y = x^2 + px + q$, для которых $q = \frac{p}{2} + 2007$, проходят через одну точку.

269. На плоскости отмечено 2008 точек так, что любые три из них являются вершинами треугольника с площадью, меньшей единицы. Определите, можно ли все эти точки закрыть треугольником с площадью 4.

Раздел III



СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

8. Свойства треугольника

С треугольником, который является простейшей из многоугольных фигур, связаны многие методы доказывания в геометрии. Любой многоугольник можно разделить на треугольники, и при установлении свойств многоугольника используются свойства треугольника. Для доказательства равенства отрезков или углов бывает удобно включить их в некоторые треугольники и доказать равенство этих треугольников. Сочетание треугольника с еще одной фигурой — окружностью — дает ряд новых свойств, имеющих разнообразные применения.

Вы уже знаете многие свойства треугольника. Напомним их.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180° ;

внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных;

каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон;

против большей стороны треугольника лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона;

средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине;

медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отсекает от каждой из них третью долю, если считать от стороны;

биссектриса треугольника делит противоположащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам; площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведенной к ней высоты или половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними или квадратному корню из произведения полупериметра и трех разностей полупериметра с каждой стороной или произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Установим новые свойства треугольника.

Теорема 1. Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов.

Доказательство. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 145). Докажем, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

В соответствии с теоремой о площади треугольника для этой площади S получим:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A; S = \frac{1}{2} ac \sin B; S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Первые два равенства дают равенство

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Так же из второго и третьего равенств получим

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Значит,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

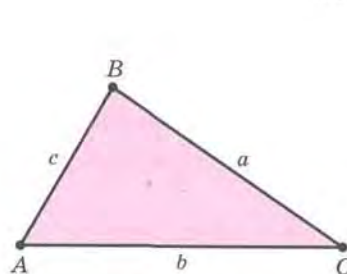


Рис. 145

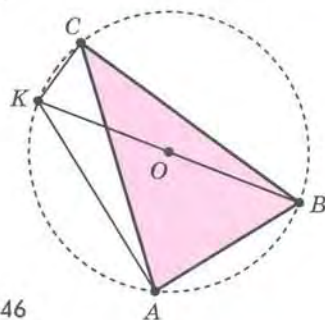


Рис. 146

Доказанное утверждение называют **теоремой синусов**. В некоторых книгах теоремой синусов называют более сильное утверждение, которое выражается равенством

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной около треугольника окружности.

Теорема 2. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной около него окружности (рис. 146). Проведем диаметр BK и рассмотрим прямоугольный треугольник KBC , который с данным треугольником ABC имеет общую сторону BC . Если вершины A и K этих треугольников лежат по одну сторону от прямой BC (см. рис. 146), то углы A и K равны, а если по разные стороны (рис. 147), то углы A и K вместе дают 180° . В обоих случаях $\sin A = \sin K$. Поэтому $\frac{BC}{\sin A} = \frac{BC}{\sin K}$.

А поскольку $BC = BK \sin K$, то $\frac{BC}{\sin A} = BK = 2R$.

Теорема 3. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон и косинуса угла между ними.

Доказательство. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно (рис. 148). Докажем, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Введем систему координат. Вершину C возьмем за начало координат, прямую, содержащую сторону AC , — в качестве оси абсцисс. Положительное направление на осях выберем так, чтобы треугольник ABC оказался в верхней полуплоскости.

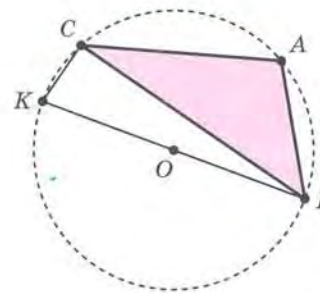


Рис. 147

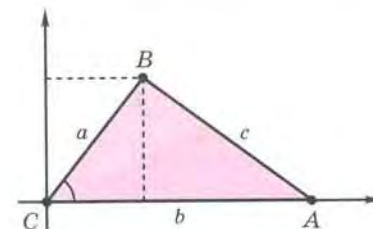


Рис. 148

сти. Единичный отрезок выберем с учетом того, что длина отрезка AC равна b . Тогда $A(b; 0)$, $B(a \cos C; a \sin C)$.

По формуле расстояния между точками можем записать:

$$AB^2 = (b - a \cos C)^2 + (0 - a \sin C)^2.$$

Проведем тождественные преобразования этой формулы, учитывая, что $AB = c$:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - 2ab \cos C + a^2 \cos^2 C + a^2 \sin^2 C = \\ &= b^2 + a^2(\cos^2 C + \sin^2 C) - 2ab \cos C = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Теорему 3 называют **теоремой косинусов**. Эта теорема обобщает теорему Пифагора. Действительно, если угол C треугольника ABC прямой (рис. 149), то $\cos C = \cos 90^\circ = 0$, и поэтому формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ превращается в формулу $c^2 = a^2 + b^2$.

Следствие. *Данный угол треугольника является:*

- а) *прямым, если квадрат противолежащей стороны равен сумме квадратов двух других сторон;*
- б) *острым, если квадрат противолежащей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон;*
- в) *тупым, если квадрат противолежащей стороны больше суммы квадратов двух других сторон.*

Доказательство. Пусть a , b , c — длины сторон BC , CA , AB треугольника ABC соответственно. Тогда теорема косинусов позволяет записать:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (1)$$

а) Если $c^2 = a^2 + b^2$, то из этого равенства и равенства (1) получим, что $2ab \cos C = 0$. Значит, $\cos C = 0$, или $C = 90^\circ$.

б) Если $c^2 < a^2 + b^2$, то из этого условия и равенства (1) получим, что $2ab \cos C > 0$, или $\cos C > 0$, значит, $0^\circ < C < 90^\circ$.

в) Если $c^2 > a^2 + b^2$, то из этого условия и равенства (1) получим, что $2ab \cos C < 0$, или $\cos C < 0$, значит, $90^\circ < C < 180^\circ$.

Установленные теоремы синусов и косинусов позволяют *решать треугольник*, т. е. находить неизвестные его стороны и углы по трем данным элементам, определяющим треугольник. Рассмотрим

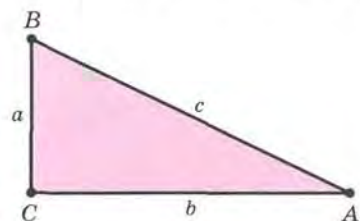


Рис. 149

два примера, в которых стороны AB , BC , CA против углов C , A , B обозначаются c , a , b соответственно.

Пример 1. Решим треугольник, у которого известны две стороны и угол между ними: $a = 47$, $b = 56$, $\angle C = 82^\circ$.

Сначала, используя теорему косинусов, найдем третью сторону c :

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{47^2 + 56^2 - 2 \cdot 47 \cdot 56 \cdot \cos 82^\circ} \approx \\ &\approx \sqrt{2209 + 3136 - 5264 \cdot 0,1392} \approx \sqrt{5345 - 732,7} = \\ &= \sqrt{4612,3} \approx 67,9. \end{aligned}$$

Теперь, используя теорему синусов, найдем углы A и B :

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a \sin C}{c} = \frac{47 \cdot \sin 82^\circ}{67,9} \approx \frac{47 \cdot 0,9903}{67,9} \approx 0,6855; \\ \angle A &\approx 43,273^\circ \approx 43^\circ 16'. \\ \sin B &= \frac{b \sin C}{c} = \frac{56 \cdot \sin 82^\circ}{67,9} \approx \frac{56 \cdot 0,9903}{67,9} \approx 0,8167; \\ \angle B &\approx 54,760^\circ \approx 54^\circ 46'. \end{aligned}$$

Для проверки вычислений найдем сумму внутренних углов треугольника:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 43^\circ 16' + 54^\circ 46' + 82^\circ = 179^\circ 62' = 180^\circ 2'.$$

Расхождение в $2'$ с ожидаемой суммой в 180° вызвано округлениями, которые проводились при вычислениях.

Отметим, что после того, как была найдена третья сторона, углы A и B можно найти и по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{56^2 + 67,9^2 - 47^2}{2 \cdot 56 \cdot 67,9} \approx 0,7281; A \approx 43^\circ 16'; \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{47^2 + 67,9^2 - 56^2}{2 \cdot 47 \cdot 67,9} \approx 0,5771; B \approx 54^\circ 45'. \end{aligned}$$

Пример 2. Решим треугольник, у которого известны сторона и прилежащие к ней углы: $a = 73$, $\angle B = 110^\circ 36'$, $\angle C = 37^\circ 9'$.

Сначала, используя свойство внутренних углов, найдем третий угол A :

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - (110^\circ 36' + 37^\circ 9') = 32^\circ 15'.$$

Далее по теореме синусов находим стороны b и c :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{73 \cdot \sin 110^\circ 36'}{\sin 32^\circ 15'} = \frac{73 \cdot \sin 110,6^\circ}{\sin 32,25^\circ} \approx \frac{73 \cdot 0,9361}{0,5336} \approx 128;$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{73 \cdot \sin 37^\circ 9'}{\sin 32^\circ 15'} = \frac{73 \cdot \sin 37,15^\circ}{\sin 32,25^\circ} \approx \frac{73 \cdot 0,6039}{0,5336} \approx 82,6.$$

Отметим, что после того, как была вычислена сторона b , сторону c можно найти и по теореме косинусов:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{73^2 + 128^2 - 2 \cdot 73 \cdot 128 \cdot \cos 37^\circ 9'} \approx \\ \approx \sqrt{21\,713 - 18\,688 \cdot 0,7971} \approx \sqrt{6816,8} \approx 82,6.$$

- ?
1. Сформулируйте свойство внутренних углов треугольника; внешнего угла треугольника.
 2. Сформулируйте свойство сторон треугольника.
 3. Что можно сказать об углах треугольника, если: противоположные им стороны равны; одна из противоположных сторон больше другой?
 4. Что можно сказать о сторонах треугольника, если: противоположные им углы равны; один из противоположных углов больше другого?
 5. Сформулируйте: свойства средней линии треугольника; свойство точки пересечения медиан треугольника; свойство биссектрисы треугольника.
 6. Запишите формульное выражение площади треугольника через: сторону и проведенную к ней высоту; две стороны и угол между ними; через стороны; через полупериметр и радиус вписанной окружности.
 7. Сформулируйте теорему синусов.
 8. Как связаны между собой сторона треугольника, противолежащий угол и радиус окружности, описанной около этого треугольника?
 9. Сформулируйте теорему косинусов.
 10. Как по длинам сторон треугольника определить вид того или иного его угла?
 11. Что означает задание *Решить треугольник*?

270. В треугольнике ABC сторона AB равна 6, а синусы углов B и C — 0,8 и 0,6 соответственно. Найдите длины других сторон треугольника.

271. Одна сторона треугольника равна 2, а прилежащие к ней углы — α и β . Найдите периметр треугольника, учитывая, что:

- а) $\cos \alpha = 0,8$ и $\cos \beta = -0,5$;
- б) $\sin \alpha = 0,5$ и $\cos \beta = 0,6$;
- в) $\sin \alpha = 0,6$ и $\sin \beta = 0,5$.

272. В треугольнике ABC углы A и B соответственно равны 30° и 45° . Найдите отношение сторон $AC : BC$.

273. Найдите периметр треугольника, одна сторона которого равна 6 см, а прилежащие к ней углы — 45° и 60° .

274. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, у которого:

- а) сторона равна 10, а угол против нее — 120° ;
- б) сторона равна m , а прилежащие к ней углы — α и β ;
- в) две стороны равны a и b , а высота, проведенная к третьей стороне, — h .

275. Два угла треугольника равны 30° и 45° , а высота, проведенная из вершины большего из них, — 6 м. Найдите стороны и две другие высоты треугольника.

276. В равнобедренном треугольнике основание равно a , боковая сторона — b , а высота, проведенная к основанию, — h . Выразите радиус окружности, описанной около треугольника, через каждые две из трех данных величин.

277. Измерения прямоугольного треугольника равны 4 и 6. Найдите радиус окружности, проходящей через две противоположные вершины и середину:

- а) большей стороны;
- б) меньшей стороны.

278. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 5. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины острых углов и середину большей стороны.

279. Гипотенуза и острый угол прямоугольного треугольника равны s и φ . Найдите биссектрисы углов треугольника.

280. Дима находится на расстоянии 45 м от башни, высоту которой он хочет определить (рис. 150). Основание башни он видит под углом 2° , а вершину — под углом 48° . Какова высота башни?

281. На горе находится вышка высотой 89 м (рис. 151). Некоторый предмет P около горы наблюдают с вершины A вышки и затем с ее основания B , и в результате получают величины 56° и 27° соответственно. Найдите высоту h горы.

282. Чтобы определить ширину реки, на одном ее берегу выбрали две точки A и B на расстоянии 60 м одна от другой и измерили углы, которые составляет направление AB с на-

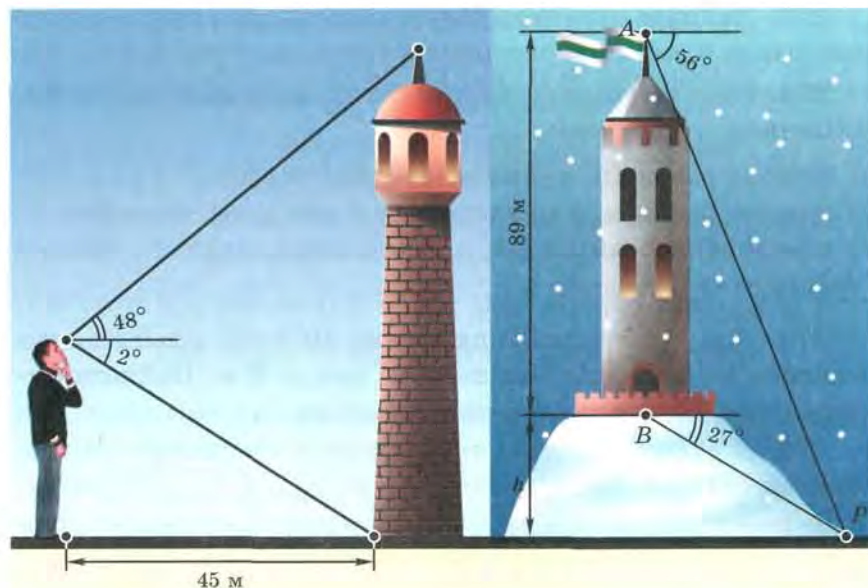


Рис. 150

Рис. 151

правлениями AC и BC — они оказались равными $12^\circ 30'$ и $72^\circ 42'$ (рис. 152). Какова ширина реки?

283. Дан квадрат со стороной a . Найдите радиус окружности, проходящей через его центр, вершину и середину стороны, которая не выходит из этой вершины.

284. Вычислите $\sin 15^\circ$.

285. Найдите биссектрисы треугольника, учитывая, что одна сторона его равна a , а прилежащие к этой стороне углы — β и γ .

286. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отметили точку K . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ACK и BCK , равны.

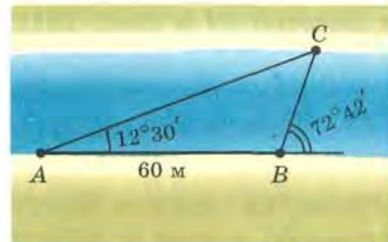


Рис. 152

287. В прямоугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H . Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и ABH , симметричны относительно прямой AB .

288. Из точки K опущены перпендикуляры KM и KN на стороны угла ABC величиной 60° . Найдите длину отрезка MN , учитывая, что $KB = a$.

289. В окружность вписан треугольник ABC , у которого $AB = 2\sqrt{3}$. Найдите величину угла C , учитывая, что центр окружности находится на расстоянии 1 от стороны AB :

а) внутри треугольника; б) вне треугольника.

290. Сторона треугольника и прилежащие к ней углы равны 121 мм, 75° и 64° . С помощью калькулятора или таблиц найдите другие стороны и площадь треугольника.

291. С помощью калькулятора или таблиц найдите неизвестные стороны треугольника ABC , учитывая, что:

- а) $\angle B = 40^\circ$; $\angle C = 80^\circ$; $a = 36$;
- б) $\angle A = 50^\circ$; $\angle B = 70^\circ$; $a = 4,2$;
- в) $\angle A = 50^\circ$; $\angle B = 68^\circ$; $c = 28$;
- г) $\angle A = 37^\circ$; $\angle C = 71^\circ$; $c = 4,8$.

292. Для определения высоты GH дерева, основание которого недоступно, выбрали две точки E и F на расстоянии 10 м и измерили углы γ и δ , под которыми видна вершина G дерева из этих точек (рис. 153). Найдите высоту дерева, учитывая, что:

- а) $\gamma = 25^\circ$ и $\delta = 20^\circ$;
- б) $\gamma = 33^\circ$ и $\delta = 25^\circ$;
- в) $\gamma = 15^\circ$ и $\delta = 11^\circ$;
- г) $\gamma = 35^\circ$ и $\delta = 27^\circ$.



Рис. 153

293. Найдите третью сторону треугольника ABC , учитывая, что:

- а) $AB = 3$, $AC = 5$ и $\angle A = 120^\circ$;
- б) $AB = 22$, $AC = 7\sqrt{3}$ и $\angle A = 30^\circ$;
- в) $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 7$ и $\angle A = 45^\circ$;
- г) $AB = 1$, $AC = 7\sqrt{3}$ и $\angle A = 150^\circ$.

294. Установите вид треугольника по величине его углов, учитывая, что его стороны равны:

- а) 2; 3; 4; б) 5; 6; 7; д) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$;
- б) 3; 4; 5; г) 5; 6; 8; е) $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$.

295. Найдите углы треугольника со сторонами:

- а) 5; 7; 8; в) 7; 13; $5\sqrt{3}$;
б) 7; 17; $8\sqrt{2}$; г) 5; $\sqrt{7}$; $2\sqrt{3}$.

296. Найдите углы треугольника со сторонами:

- а) $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{24}$; в) 1; 5; $3\sqrt{2}$;
б) 7; 13; 15; г) 9; $2\sqrt{3}$; $7\sqrt{3}$.

297. С помощью калькулятора или таблиц найдите неизвестные стороны и углы треугольника ABC , учитывая, что:

- а) $a = 630$; $b = 630$; $\angle C = 52^\circ 54'$;
б) $\angle A = 87^\circ 20'$; $a = 26,2$; $b = 49,7$;
в) $\angle B = 48^\circ 15'$; $\angle C = 67^\circ 48'$; $a = 73,9$;
г) $\angle C = 62^\circ 48'$; $b = 102$; $c = 77,8$;
д) $b = 320$; $c = 230$; $\angle A = 86^\circ 42'$;
е) $a = 6,37$; $b = 7,48$; $c = 8,59$.

298. Найдите наибольшую медиану и наименьшую биссектрису треугольника со сторонами 40, 50 и 60.

299. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна меньшему основанию и составляет угол в 70° с большим основанием, равным 20. Найдите периметр и площадь трапеции.

300. Решите треугольник, у которого:

- а) два угла равны 65° и 45° , а сторона против меньшего из них — 10;
б) два угла равны 100° и 15° , а сторона против меньшего из них — 10;
в) две стороны равны 25 и 50, а угол против большей из них — 30° ;
г) две стороны равны 24 и 80, угол против меньшей из них — 10° , а угол против большей из них — тупой;
д) две стороны равны 24 и 80, а угол против большей из них — 10° .

301. Углы T и U треугольника TUV соответственно равны 60° и φ , а сумма сторон TU и TV равна единице. Найдите сторону UV .

302. Равносторонний треугольник $R_1S_1T_1$ вписан в равносторонний треугольник RST так, что вершины R_1 , S_1 , T_1 лежат соответственно на сторонах ST , TR , RS , а углы RT_1S_1 , SR_1T_1 , TS_1R_1 равны друг другу. Найдите:

- а) отношение сторон треугольников $R_1S_1T_1$ и RST , учитывая, что угол RT_1S_1 равен α ;
б) отношение сторон треугольников $R_1S_1T_1$ и RST , учитывая, что угол RT_1S_1 равен 90° .

303. Докажите, что:

- а) если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то суммы квадратов его противоположных сторон равны;
б) если суммы квадратов противоположных сторон четырехугольника равны, то диагонали этого четырехугольника перпендикулярны.

304. Смежные стороны параллелограмма равны m и n , а его меньший угол — α . Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

305. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

306. Докажите, что медиана треугольника равна квадратному корню из полусуммы квадратов сторон треугольника, заключающих медиану, уменьшенной на квадрат половины третьей стороны.

307. Есть два вида коробок для конфет, в одну из которых укладывается 30 конфет, во вторую — 32 конфеты. Найдите количество вертикальных и горизонтальных рядов в коробках, учитывая, что вертикальных рядов в обеих коробках вместе 14, а горизонтальных рядов в коробке первого вида на 1 больше.

308. По горизонтальной поверхности катятся навстречу друг другу два металлических шара с импульсами $4 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ и $6 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, причем скорость первого шара на 2 м/с больше, а их общая масса равна 4 кг . Найдите:

- а) массу каждого из шаров;
б) скорости шаров после столкновения.

309. На отрезке MN длиной 50 см выбрана точка Q и на полученных отрезках частях MQ и NQ построены треугольники MQP и NQR (рис. 154) с площадями

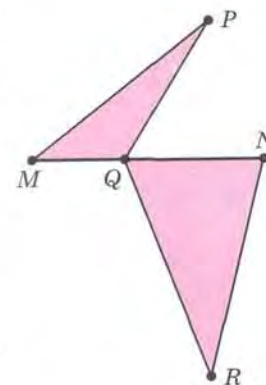


Рис. 154

300 см² и 705 см² соответственно. Найдите основания этих треугольников, учитывая, что отрезок PR перпендикулярен прямой MN и его конец P на 17 см ближе к этой прямой по сравнению с концом R .

310. Докажите, что:

а) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$; б) $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

311. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3} \sin 60^\circ \operatorname{ctg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ - 2 \sin 30^\circ$; в) $\frac{6 \sin 30^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}$;
б) $3 \cos 45^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - 3 \sin 45^\circ$; г) $\frac{1 - 2 \sin^2 60^\circ}{2 \cos^2 60^\circ - 1}$.

312. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) - \cos (90^\circ + \alpha) \sin (180^\circ - \alpha)$;
б) $\operatorname{ctg} (90^\circ + \beta) \operatorname{ctg} (180^\circ - \beta) - \operatorname{ctg} (90^\circ - \beta) \operatorname{tg} (180^\circ - \beta)$;
в) $\cos (90^\circ + \lambda) \sin \lambda - \sin^2 (180^\circ - \lambda) + \operatorname{tg} (180^\circ - \lambda) \operatorname{tg} (90^\circ + \lambda)$;
г) $\cos (180^\circ - \omega) \operatorname{ctg} (90^\circ + \omega) + \cos (90^\circ + \omega) \operatorname{ctg} (180^\circ - \omega)$.

* * *

313. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , ABD , ACD , BCD равны. Докажите, что его диагонали AC и BD равны.

314. На полке стоит в произвольном порядке собрание сочинений Янки Купалы в 10 книгах. Разрешается брать любую книгу и ставить ее на третье место слева. Можно ли такими перестановками упорядочить это собрание сочинений?

315. Найдите наименьшее целое число m , для которого неравенство $x^4 + 2x^2 + m \geq 4x$ истинно при всех значениях переменной x .

9. Площади треугольника и четырехугольника

Вы уже знаете ряд формул для нахождения площади треугольника и различных четырехугольников.

Если a — основание треугольника, h — проведенная к нему высота, S — площадь треугольника, то $S = \frac{1}{2} ah$ (рис. 155);

$$S = \frac{1}{2} ah$$

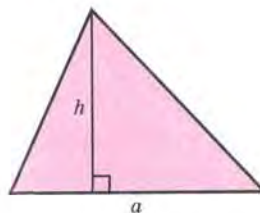


Рис. 155

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

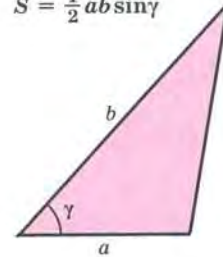


Рис. 156

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

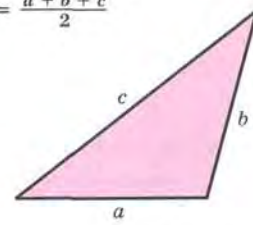


Рис. 157

если a и b — стороны треугольника, γ — угол между ними, S — площадь треугольника, то $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ (рис. 156);

если a , b , c — стороны треугольника, p — полупериметр, S — площадь треугольника, то $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона) (рис. 157);

если a , b , c — стороны треугольника, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника, то $S = pr$ (рис. 158);

если a и b — основания трапеции, h — ее высота, S — площадь трапеции, то $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ (рис. 159);

если a — основание параллелограмма, h — проведенная к нему высота, S — площадь параллелограмма, то $S = ah$ (рис. 160).

Установим еще некоторые формулы.

Теорема 4. Если a , b , c — стороны треугольника ABC , противоположные его углам A , B , C соответственно, R — радиус описанной окружности, S — площадь треугольника, то:

$$S = pr$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

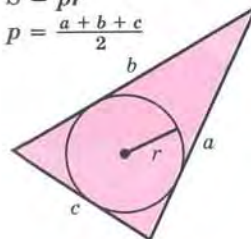


Рис. 158

$$S = \frac{1}{2} (a+b)h$$

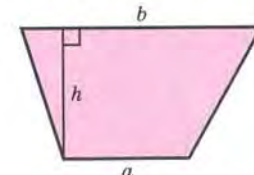


Рис. 159

$$S = ah$$

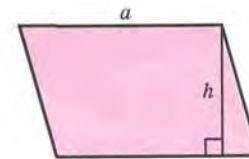


Рис. 160

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A};$$

$$S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C;$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Доказательство. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC , противоположные его углам A, B, C соответственно (рис. 161). Тогда можем записать

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C. \quad (1)$$

Теорема синусов позволяет записать равенство

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

откуда

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

Значит, формулу (1) можно записать так:

$$S = \frac{1}{2} a \frac{a \sin B}{\sin A} \sin C,$$

или

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Докажем вторую формулу. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC , противоположные его углам A, B, C , а R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 162). Тогда

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

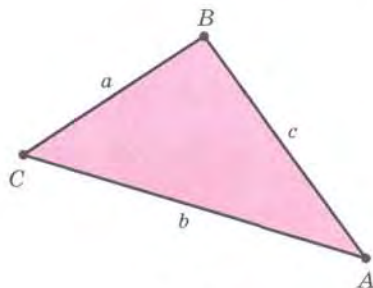


Рис. 161

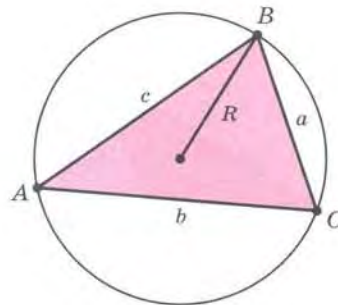


Рис. 162

А по следствию из теоремы 2 можно записать

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,$$

или

$$a = 2R \sin A.$$

Поэтому

$$S = \frac{(2R \sin A)^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{4R^2 \sin A^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Докажем третью формулу (см. рис. 162). Поскольку $\frac{a}{\sin A} = 2R$, то $R = \frac{a}{2 \sin A}$. Умножим числитель и знаменатель правой части полученного равенства на bc :

$$R = \frac{abc}{2bc \sin A},$$

или

$$R = \frac{abc}{4 \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right)}.$$

Теперь учтем, что выражение $\frac{1}{2} bc \sin A$ выражает площадь треугольника ABC :

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Значит,

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Пример 1. Найдем радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около треугольника со сторонами 40, 51, 77 (рис. 163).

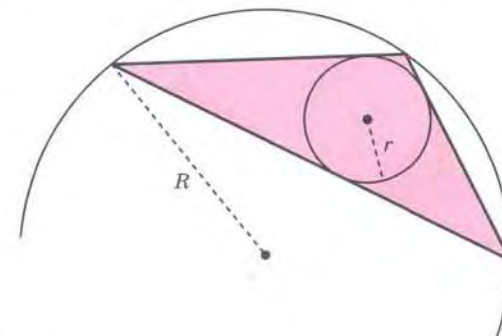


Рис. 163

Имеем:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+51+77}{2} = 84;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-40)(84-51)(84-77)} = \sqrt{84 \cdot 44 \cdot 33 \cdot 7} = 924;$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{924}{84} = 11;$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{40 \cdot 51 \cdot 77}{4 \cdot 924} = 42,5.$$

Теорема 5. Если d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника, γ — угол между ними, S — площадь четырехугольника, то $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$.

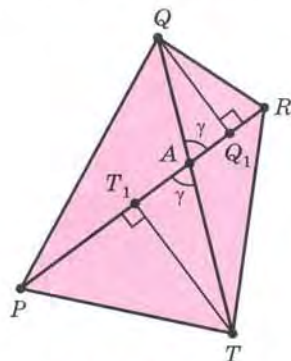


Рис. 164

Доказательство. Пусть диагонали PR и QT четырехугольника $PQRT$ пересекаются в точке A и равны d_1 и d_2 соответственно, а угол между ними равен γ (рис. 164).

Пусть QQ_1 и TT_1 — высоты треугольников PQR и PTR соответственно. Тогда

$$QQ_1 = AQ \sin \gamma \text{ и } TT_1 = AT \sin \gamma.$$

Учитывая, что диагональ PR разделяет четырехугольник $PQRT$ на треугольники PQR и PTR , для площади S этого четырехугольника получим:

$$\begin{aligned} S &= S_{PQR} + S_{PTR} = \frac{1}{2} PR \cdot QQ_1 + \frac{1}{2} PR \cdot TT_1 = \frac{1}{2} PR(QQ_1 + TT_1) = \\ &= \frac{1}{2} d_1 (AQ \sin \gamma + AT \sin \gamma) = \frac{1}{2} d_1 (AQ + AT) \sin \gamma = \\ &= \frac{1}{2} d_1 \cdot QT \sin \gamma = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma. \end{aligned}$$

Фигуры на рисунке 165 объединяет то, что все они имеют одну и ту же площадь.

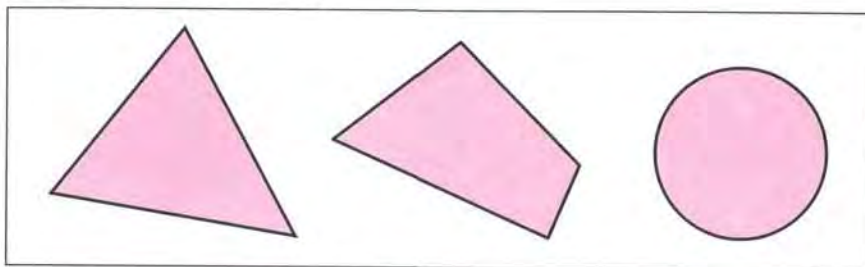


Рис. 165

Фигуры, площади которых равны, называют **равновеликими фигурами**.

Теорема 6. Из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к ее основаниям, — подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, — равновелики.

Доказательство. Пусть диагонали KM и LN трапеции $KLMN$ с основаниями KN и LM пересекаются в точке O (рис. 166). Докажем, что треугольники KON и LOM подобны, а площади треугольников KOL и NOM равны.

Углы OKN и OML , а также углы ONK и OLM равны, так как это внутренние накрест лежащие углы при параллельных KN и LM , пересеченных соответственно прямыми KM и LN . Поэтому треугольники KON и LOM подобны.

Поскольку треугольники KLN и KMN имеют общую сторону KN и равные высоты LL_1 и MM_1 , то их площади равны. Но треугольники KLN и KMN имеют общую часть — треугольник KON . Поэтому если его площадь вычесть из равных площадей треугольников KLN и KMN , то получатся равные площади, т. е. треугольники KOL и MNO равновелики.

Теорема 7. Если из четырех треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновелики, то такой четырехугольник является трапецией.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q и площади треугольников AQD и BQC равны (рис. 167). Докажем, что стороны AB и DC параллельны.

Обратим внимание на то, что площади треугольников ABC и ABD равны, так как эти треугольники получаются присоединением треугольника ABQ к равновеликим треугольникам AQD и BQC . Но треугольники ABC и ABD имеют общую

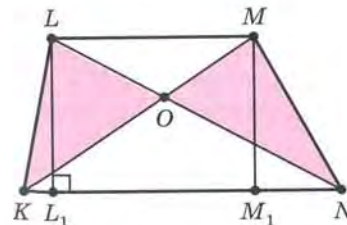


Рис. 166

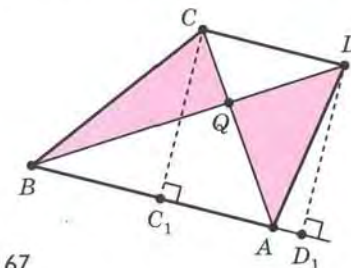


Рис. 167

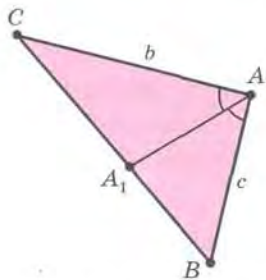


Рис. 168

сторону AB . Поэтому у них равны высоты CC_1 и DD_1 , проведенные к этой стороне. Вместе с этим отрезки CC_1 и DD_1 параллельны как перпендикуляры, проведенные к одной прямой AB . Поэтому четырехугольник CC_1D_1D — параллелограмм. А это позволяет утверждать, что его стороны CD и C_1D_1 , а значит, и отрезки AB и DC параллельны.

Пример 2. Найдем длину l_a биссектрисы AA_1 треугольника ABC , у которого $AB = c$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 168).

Поскольку биссектриса AA_1 разделяет треугольник ABC на треугольники BAA_1 и CAA_1 , то:

$$S_{ABC} = S_{BAA_1} + S_{CAA_1};$$

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} cl_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} bl_a \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} l_a \sin \frac{\alpha}{2} (b + c).$$

Теперь учтем, что $\sin \alpha = \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} l_a \sin \frac{\alpha}{2} (b + c);$$

$$bc \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} l_a (b + c).$$

Отсюда

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

- ?
1. Запишите формулу, выражающую связь между стороной треугольника, проведенной к ней высотой и площадью треугольника.
 2. Запишите формулу, выражающую связь между двумя сторонами треугольника, углом между ними и площадью треугольника.
 3. Запишите формулу, выражающую связь между сторонами треугольника и его площадью.
 4. Запишите формулу, выражающую связь между полупериметром треугольника, его площадью и радиусом вписанной окружности.
 5. Запишите формулу, выражающую связь между стороной треугольника, его углами и площадью.
 6. Запишите формулу, выражающую связь между углами треугольника, радиусом описанной окружности и площадью треугольника.
 7. Запишите формулу, выражающую связь между сторонами треугольника, радиусом описанной окружности и площадью треугольника.

8. Запишите формулу, выражающую связь между основаниями трапеции, ее высотой и площадью.
9. Запишите формулу, выражающую связь между площадью параллелограмма, его стороной и проведенной к ней высотой.
10. Запишите формулу, выражающую связь между диагоналями четырехугольника, углом между ними и площадью четырехугольника.
11. Какие фигуры называют равновеликими?
12. Сформулируйте свойство треугольников, на которые разделяется трапеция своими диагоналями.
13. Сформулируйте признак трапеции по связи между площадями треугольников, на которые разделяется четырехугольник своими диагоналями.

316. Объясните, почему формулу площади:

- а) треугольника можно считать частным случаем формулы площади трапеции;
- б) трапеции можно считать обобщением формулы площади прямоугольника.

317. Точки A, B, C, D являются серединами сторон KL, LM, MN, NK прямоугольника $KLMN$ (рис. 169). Определите, какую часть площади этого прямоугольника составляет площадь:

- а) треугольника KLN ;
- б) треугольника KLD ;
- в) четырехугольника $KLCN$;
- г) пятиугольника $KLBCN$;
- д) пятиугольника $KLBCD$;
- е) четырехугольника $ABCD$;
- ж) пересечения треугольников KBN и LDM ;
- з) пересечения четырехугольников $KABN$ и $MCDL$.

318. Опишите способ разделения треугольника на два равновеликих треугольника одним прямолинейным разрезом.

319. Как должна проходить прямая, разделяющая данный прямоугольник на равновеликие фигуры? Будут ли равными периметры полученных фигур-частей?

320. Укажите способ разрезания на части, из которых можно составить прямоугольник, фигуры, которая является:

- а) треугольником;
- б) трапецией;
- в) параллелограммом.

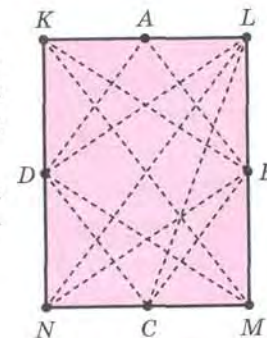


Рис. 169

321. Куб разрезали на два одинаковых прямоугольных параллелепипеда. Определите:

- а) какую часть составляет площадь поверхности одного из полученных прямоугольных параллелепипедов от площади поверхности куба;
- б) можно ли куб с ребром длиной 1 см разбить на такие кубики, общая площадь поверхности которых больше квадратного километра.

322. На боковых сторонах равнобедренного треугольника PQR с основанием QR выбрали точки A и B , равноудаленные от вершины P , и нашли точку C пересечения отрезков QB и RA . Докажите, что равны площади треугольников:

- а) PQB и PRC ; б) QCA и RCB ; в) AQB и BRA .

323. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника с катетом a расположены так, что вершина одного угла одного из них принадлежит гипотенузе другого. Найдите площади их пересечения и объединения, учитывая, что пересечением является:

- а) квадрат;
- б) прямоугольник, измерения которого относятся как $1:2$;
- в) прямоугольник, измерения которого относятся как $2:3$.

324. Докажите, что стороны a и b треугольника и проведенные к ним высоты h_a и h_b связаны формулой $ah_a = bh_b$.

325. Докажите, что если у двух треугольников есть пара равных:

- а) сторон, то их площади относятся как проведенные к ним высоты;
- б) высот, то их площади относятся как стороны, к которым проведены эти высоты.

326. Найдите в треугольнике такую точку, чтобы отрезки, соединяющие ее с вершинами, делили этот треугольник на три равновеликие части.

327. Установите, верно ли, что площадь первого треугольника больше площади второго, если:

- а) периметр первого треугольника больше периметра второго;
- б) каждая сторона первого треугольника больше соответствующей стороны второго;
- в) каждая сторона первого треугольника больше каждой стороны второго.

328. Есть прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой. Докажите, что:

- а) высота, проведенная к гипотенузе, не больше $0,5$;
- б) площадь треугольника не больше $0,25$.

329. Среди треугольников, у которых две стороны равны m и n , найдите треугольник с наибольшей площадью.

330. Докажите, что из всех прямоугольников:

- а) с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат;
- б) с данной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

331. Докажите, что площадь прямоугольника не больше половины площади квадрата, построенного на его диагонали.

332. Докажите, что площадь треугольника, являющегося частью данного квадрата, больше половины площади этого квадрата.

333. Точка B принадлежит отрезку UA , соединяющему вершину U треугольника TUV с точкой A его стороны TV (рис. 170). Найдите отношение площадей треугольников TBV и TUV , учитывая, что:

- а) A — середина отрезка TV , $UB:BA = 2:1$;
- б) $TA:AV = 2:1$, B — середина отрезка UA ;
- в) $TA:AV = UB:BA = 2:1$.

334. Площадь треугольника ABC равна S . Найдите площадь окрашенного треугольника, который связан с треугольником ABC так, как показано на рисунке:

- а) 171; б) 172;

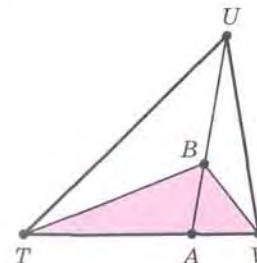


Рис. 170

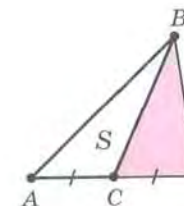


Рис. 171

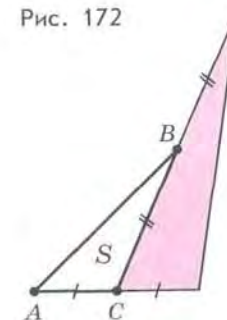


Рис. 172

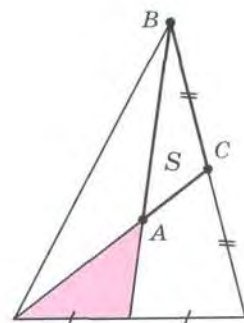


Рис. 173

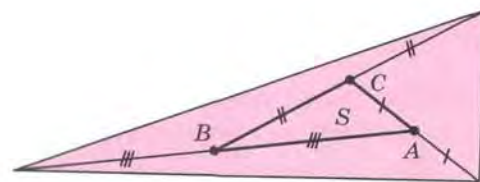


Рис. 174

в) 173; г) 174.

335. Как функцию переменной x выразите площадь части единичного квадрата, окрашенной на рисунке:

- а) 175; в) 177; д) 179;
б) 176; г) 178; е) 180.

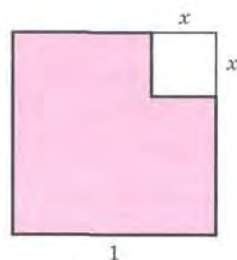


Рис. 175

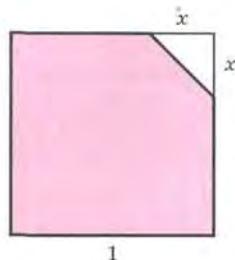


Рис. 176

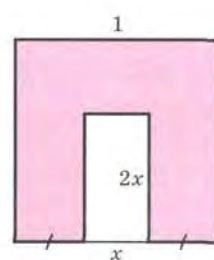


Рис. 177

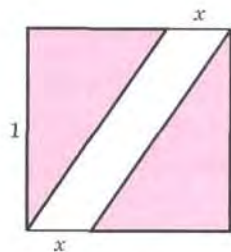


Рис. 178

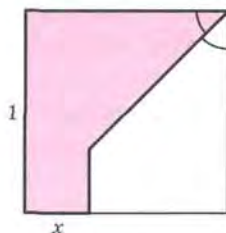


Рис. 179

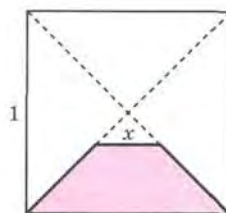


Рис. 180

336. Точки K, L, M, N являются серединами сторон DA, AB, BC, CD квадрата $ABCD$ (рис. 181). Установите, какую часть площади этого квадрата составляет площадь:

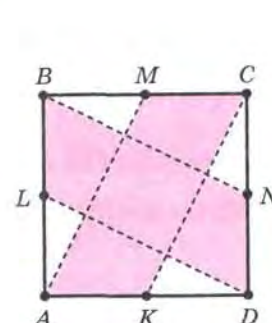


Рис. 181

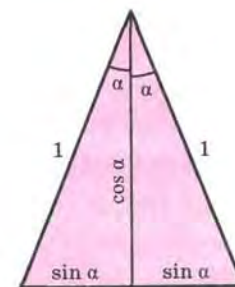


Рис. 182

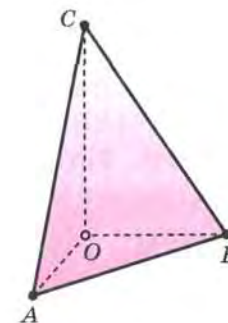


Рис. 183

- а) четырехугольника $AKCM$;
б) пересечения четырехугольников $AKCM$ и $BLDN$;
в) объединения четырехугольников $AKCM$ и $BLDN$;
г) дополнения до объединения четырехугольников $AKCM$ и $BLDN$.

337. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите:

- а) приращение площади треугольника при увеличении каждого его катета на x ;
б) уменьшение площади треугольника при уменьшении одного его катета на x , а другого — на y ;
в) приращение площади треугольника при увеличении одного его катета на 10 %, другого — на 8 %.

338. Используя рисунок 182, докажите формулу синуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

339. Ребра OA, OB, OC треугольной пирамиды $OABC$ перпендикулярны друг другу и равны соответственно 10, 20, 30 (рис. 183). Найдите полную поверхность пирамиды.

340. Ребра OA, OB, OC треугольной пирамиды $OABC$ перпендикулярны друг другу (см. рис. 183). Докажите, что квадрат площади грани ABC равен сумме квадратов площадей трех остальных граней (теорема Пифагора для треугольной пирамиды).

341. Докажите, что сумма расстояний от точки X равносоставленного треугольника до его сторон не зависит от выбора точки X .

342. Точки A и B — середины сторон PQ и RS выпуклого четырехугольника $PQRS$. Определите, какую часть площади четырехугольника $PQRS$ составляет площадь четырехугольника $PARB$.

343. Установите, какую часть площади параллелограмма составляет его часть, окрашенная на рисунке:

- а) 184; б) 185; в) 186; г) 187.

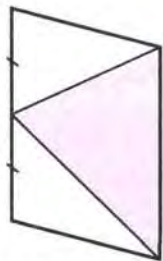


Рис. 184

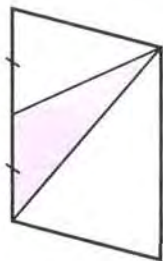


Рис. 185

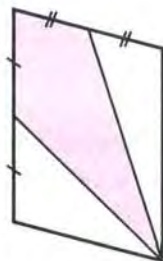


Рис. 186



Рис. 187

344. Найдите площадь трапеции, у которой:

- а) основания равны 6 см и 9 см, а диагонали — 13 см и 14 см;
б) основания равны 8 см и 23 см, а боковые стороны — 13 см и 14 см.

345. Докажите, что площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного выпуклого четырехугольника, равна половине его площади.

346. Докажите, что если диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке Q , то $\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$.

347. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделяют его на четыре части, площади трех из них равны S_1, S_2, S_3 . Найдите площадь S четвертой четырехугольной части.

348. Диагонали выпуклого четырехугольника разделяют его на четыре треугольника. Докажите, что произведения площадей несоседних треугольных частей одинаковы.

349. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q , а площади треугольников ABD, ACD, AQD равны k, l, m соответственно. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

350. Разделите данную трапецию на равновеликие части, которых всего:

- а) 2; б) 3.

351. Докажите, что:

- а) отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, разделяет ее на равновеликие части;
б) если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, разделяет этот четырехугольник на равновеликие части, то этот четырехугольник является трапецией;
в) если каждый из двух отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, разделяет этот четырехугольник на равновеликие части, то этот четырехугольник является параллелограммом.

352. Докажите, что:

- а) концы каждой боковой стороны трапеции и произвольная точка отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, являются вершинами равновеликих треугольников;
б) концы каждой диагонали трапеции и произвольная точка отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, являются вершинами равновеликих треугольников.

353. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах трапеции и параллельного ее основаниям, равным a и b , разделяющего трапецию на равновеликие части.

354. Докажите, что если два треугольника имеют общую вершину, а другие их вершины расположены на двух прямых, проходящих через нее, то площади треугольников относятся как произведения их сторон, лежащих на этих прямых.

355. Из середины медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, опущены перпендикуляры на его стороны. Найдите, какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, вершины которого совпадают с основаниями этих перпендикуляров.

356. На сторонах треугольника ABC отмечены такие точки X, Y, Z , что $AX : XB = 1 : 2, BY : YC = 2 : 3, CZ : ZA = 3 : 4$. Установите, какую часть площади треугольника XYZ составляет от площади треугольника ABC .

357. На сторонах треугольника ABC выбраны точки K, L, M так, что $AK:KB = 3:7$, $BL:LC = 5:3$, а треугольники AKM и CLM равновелики. Найдите, в каком отношении точка M делит сторону AC .

358. Точки T, X, Y, Z — такие точки на сторонах четырехугольника $ABCD$, что $AT:TB = 3:1$, $BX:XC = 1:2$, $CY:YD = 1:1$, $DZ:ZA = 1:5$. Установите, какую часть площадь шестиугольника $ATXCYZ$ составляет от площади четырехугольника $ABCD$.

359. Вершины E, F, G, H параллелограмма $EFGH$ соединены отрезками с серединами сторон FG, GH, HE, EF соответственно. Найдите, какую часть площади параллелограмма $EFGH$ составляет площадь параллелограмма, ограниченного этими отрезками.

360. Точки A, B, C на сторонах треугольника KLM выбраны так, что $KA:LA = LM:MB = MC:KC = 1:2$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми KB, LC, MA , составляет седьмую долю площади треугольника KLM .

361. На сторонах прямого угла C выбраны такие точки A и B , что $CA = 12$, $CB = 35$, а на луче, выходящем из точки C и проходящем внутри угла под углом 60° к лучу CB , — такая точка D , что $CD = 50$. Найдите площади треугольников ACD, BCD, ABD .

362. На сторонах угла A величиной 75° выбраны такие точки K и L , что $AK = \sqrt{2}$ и $AL = \sqrt{3}$, а на луче, выходящем из точки A и проходящем внутри угла под углом 60° к лучу OK , — такая точка M , что $AM = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

363. В треугольнике KLM проведены его высота LC и через середину A стороны KM перпендикулярно этой стороне прямая, которая пересекает сторону KL в точке B (рис. 188). Докажите, что треугольник KBC равновелик четырехугольнику $CBLM$.

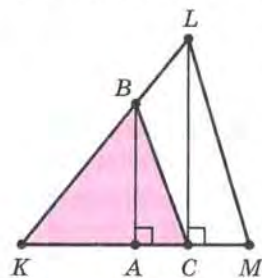


Рис. 188

364. Через точки A_1, A_2, A_3 , разделяющие сторону NP треугольника NOP на четыре доли, проведены перпендикулярные этой стороне прямые, которые пересекают еще одну сторону или обе стороны

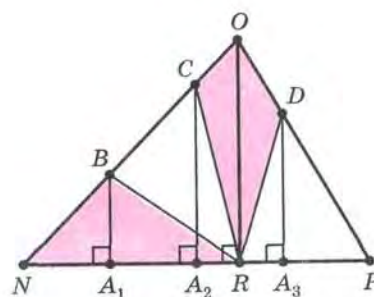


Рис. 189

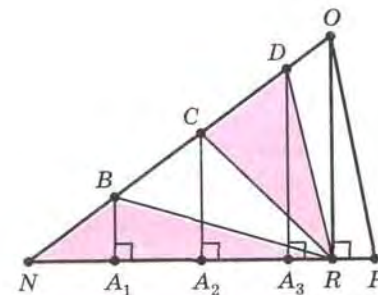


Рис. 190

в точках B, C, D (рис. 189 и 190). Докажите, что прямые, проходящие через эти точки, и основание R высоты OR разделяют треугольник на равновеликие многоугольники.

365. Через середину A диагонали PR четырехугольника $PQRS$ проведена прямая, параллельная другой диагонали QS этого четырехугольника, и точка B пересечения этой прямой со стороной RS соединена с вершиной Q (рис. 191). Докажите, что четырехугольник $PQBS$ равновелик треугольнику QRB .

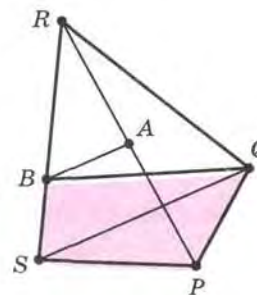


Рис. 191

366. Найдите площадь треугольника, две стороны которого и радиус вписанной окружности соответственно равны 30, 40 и 10.

367. Шанхай, Пекин, Тяньцзинь, Ухань — наибольшие города Китая (рис. 192). Население Пекина относится к населению Шанхая как $648:821$, а к увеличенному на 3 тыс. населению Уханя — как $9:5$. Увеличенное на 12 тыс. население Тяньцзиня относится к увеличенному на 3 тыс. населению Уханя как $11:10$, а удвоенное население Тяньцзиня на 343 тыс. меньше населения Шанхая. Какова численность населения в этих городах Китая?

368. Янцзы, Хуанхэ, Сицзян, Ляохэ — крупнейшие реки Китая (см. рис. 192). Длина Хуанхэ относится к длине Сицзяна как $323:142$, а увеличенная на 85 км длина Хуанхэ к длине Янцзы — как $17:20$. Уменьшенная на 10 км длина Ляохэ относится к длине Сицзяна как $2:3$, а учетверенная

Китай
(Восточная Азия)
Столица — Пекин
Площадь — 9597 тыс. км²
Население — 1289 млн чел.



Рис. 192

длина Ляохэ на 80 км меньше длины Янцзы. Найдите длины этих рек.

369. Пассажирский поезд из Урумчи до Ланьчжоу шел со скоростью на 12 км/ч меньшей по сравнению со скоростью на другой части от Ланьчжоу до Пекина через Сиань (рис. 193). Найдите скорости поезда на каждом из уча-

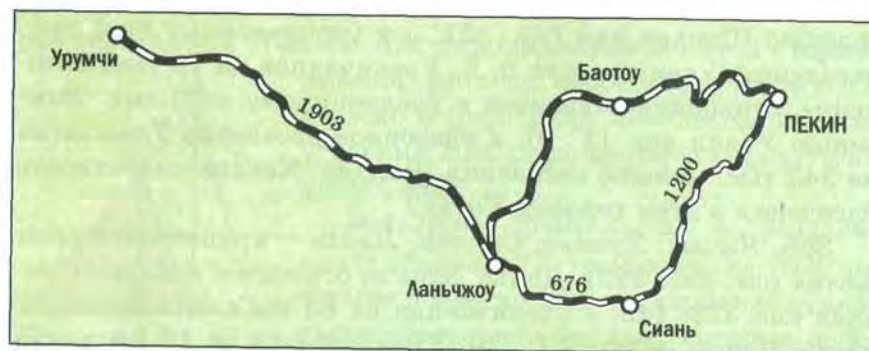


Рис. 193

стков, учитывая, что вторую часть он прошел на 6,6 ч быстрее.

370. Решите систему:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} a - b = -1, \\ c + b = 5, \\ ac = 3; \end{cases} & \text{в) } & \begin{cases} fg = 6, \\ fh = 8, \\ gh = 12; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} c + d = -3, \\ e - d = 1, \\ c^2 + e^2 = 10; \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} i(j + k) = 2, \\ j(i + k) = -28, \\ k(i + j) = -10. \end{cases} \end{aligned}$$

371. Запишите уравнение параболы, изображенной на рисунке:

а) 194; б) 195.

372. На координатной плоскости начертите линию, которая задается уравнением:

а) $4x - 6y = 9$; б) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

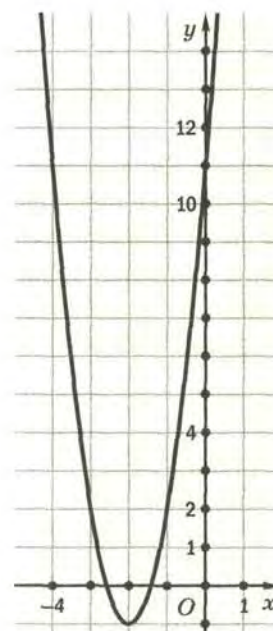


Рис. 194

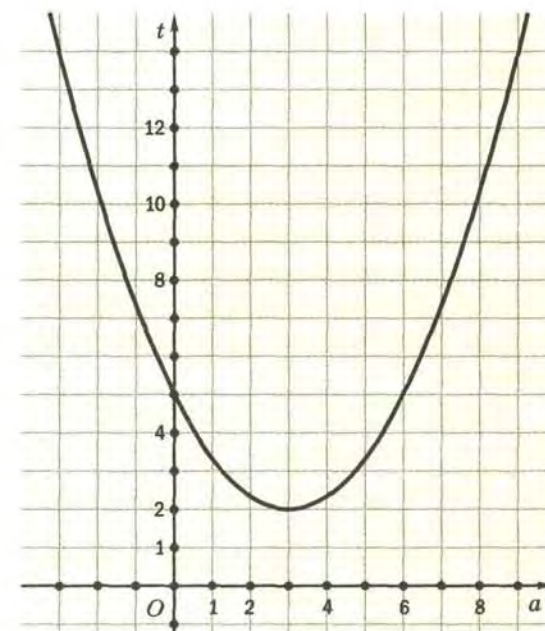


Рис. 195

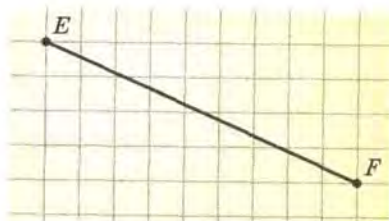


Рис. 196

373. Начертите отрезок EF так, как показано на рисунке 196. Найдите такую точку X этого отрезка, что:

а) $\frac{EX}{XF} = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{FX}{XE} = \frac{2}{3}$.

* * *

374. Докажите, что если $a > b > c > 0$, то истинно неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

375. Установите, каких треугольников с целочисленными сторонами больше: с периметром 2007 или с периметром 2010.

376. Найдите все целые числа n , при которых уравнение $x^2 + nx + n = 0$ имеет целый корень.

10*. Координатный метод

Координаты — это числа, заданием которых определяют положение точки на плоскости или в пространстве. Использование координат дает возможность поставить в соответствие геометрическим объектам определенные алгебраические формулы, из-за чего проверка тех или иных связей между фигурами сводится к выполнению алгебраических преобразований. Выяснение значения метода координат как способа перевода задач геометрии на язык алгебры дало в XVII столетии сильный толчок развитию математики. Сегодня координаты широко используются в естественных и технических науках при проведении теоретических и практических исследований.

Вы уже знаете, что длина отрезка с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ выражается формулой $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, что каждое уравнение с двумя переменными определяет на координатной плоскости определенную фигуру — график этого уравнения. Например, линейное уравнение $ax + by = c$ с двумя переменными x и y , в котором хотя бы один коэффициент при переменных не равен нулю, на координатной плоскости представляется прямой; прямая, проходящая через

точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, задается уравнением $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; окружность с центром $O(a, b)$ и радиусом r задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ на координатной плоскости представляется окружностью с центром $O(a, b)$ и радиусом r .

Теорема 8. Угловой коэффициент k прямой a , заданной уравнением $y = kx + b$, равен тангенсу угла φ между ее лучом, расположенным выше оси абсцисс, и положительным направлением этой оси.

Доказательство. Пусть прямая a , которая представляет на координатной плоскости уравнение $y = kx + b$, образует с положительным направлением оси абсцисс угол φ (рис. 197 и 198). Докажем, что тангенс этого угла равен угловому коэффициенту k прямой a .

На прямой a выберем две точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$. Пусть для определенности $x_1 < x_2$. Координаты точек M и N удовлетворяют уравнению $y = kx + b$, поэтому:

$$y_1 = kx_1 + b \text{ и } y_2 = kx_2 + b.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$y_2 - y_1 = kx_2 - kx_1, \text{ или } y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Вместе с этим для случая, соответствующего рисунку 197, получим

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \varphi.$$

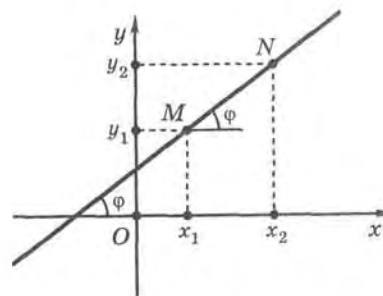


Рис. 197

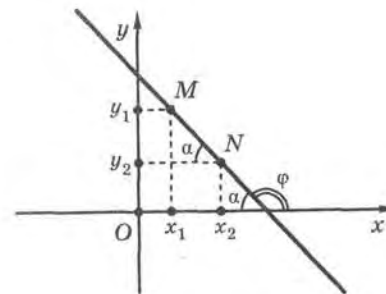


Рис. 198

Для другого возможного случая, соответствующего рисунку 198, будем иметь:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, который образует прямая a с осью абсцисс. Но $\alpha = 180^\circ - \varphi$. Поэтому

$$-\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} (180^\circ - \varphi) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Значит, и во втором случае $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \varphi$.

Таким образом, $k = \operatorname{tg} \varphi$.

Теорема 9. Прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда истинно равенство $k_1k_2 = -1$.

Доказательство. Пусть прямые a_1 и a_2 , представляющие на координатной плоскости уравнения $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, пересекаются в точке A и образуют с положительным направлением оси абсцисс углы φ_1 и φ_2 (рис. 199).

Пусть $a_1 \perp a_2$. Тогда, по свойству внешнего угла треугольника, $\angle A = \varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ$. Значит, $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos 90^\circ = 0$. Поэтому $\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 = 0$. Разделив обе части этого равенства на $\cos \varphi_2 \cos \varphi_1$, получим равенство $1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1 = 0$. Теперь, учитывая, что $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, получим: $1 + k_1k_2 = 0$, или $k_1k_2 = -1$.

Пусть для прямых, изображенных на рисунке 199, выполняется условие $k_1k_2 = -1$. Тогда $\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1$, или $\cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 = 0$, или $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$. Но $\varphi_2 - \varphi_1 = \angle A$. Значит, $\cos A = 0$, а это означает, что угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 равен 90° .

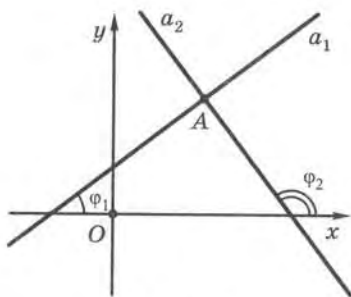


Рис. 199

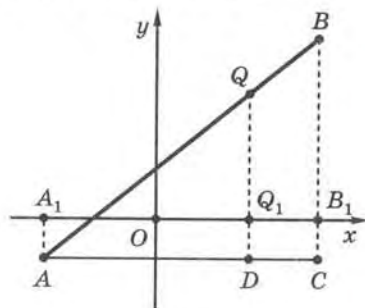


Рис. 200

Вы знаете, что через координаты концов $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ отрезка можно выразить его длину:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Теорема 10. Координаты точки $Q(x; y)$, разделяющей данный отрезок с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в отношении $k = AQ : QB$, определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

► **Доказательство.** Пусть точка Q разделяет отрезок с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в отношении $\frac{AQ}{BQ}$, равном k (рис. 200).

Спроектируем отрезок AB на ось абсцисс. Тогда точки A, B, Q спроектируются в точки $A_1(x_1; 0), B_1(x_2; 0), Q_1(x; 0)$. Через точки A и B проведем прямые, параллельные осям абсцисс и ординат соответственно. Пусть они пересекаются в точке C , а прямая QQ_1 пересекает прямую AC в точке D .

С учетом теоремы о пропорциональных отрезках получим, что точка D делит отрезок AC в отношении k , а тогда точка Q_1 в этом отношении делит отрезок A_1B_1 , т. е. $\frac{A_1Q_1}{B_1Q_1} = k$, или

$\frac{|x - x_1|}{|x - x_2|} = k$. Поскольку Q_1 — внутренняя точка отрезка A_1B_1 , то разности $x - x_1$ и $x - x_2$ имеют противоположные знаки, т. е.

$\frac{x - x_1}{x - x_2} < 0$. Учитывая это, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x - x_2} &= -k; \\ x - x_1 &= -k(x - x_2); \\ x - x_1 &= -kx + kx_2; \\ x + kx &= x_1 + kx_2; \\ (1 + k)x &= x_1 + kx_2; \\ x &= \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}. \end{aligned}$$

Так же найдем, что ордината y точки Q выражается формулой

$$y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Следствие. Координаты середины $Q(x; y)$ отрезка с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяются формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Действительно, середина Q отрезка делит его в отношении, равном 1.

Пример 1. Докажем, что расстояние $d(M, l)$ от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой l , заданной уравнением $ax + by + c = 0$, определяется формулой

$$d(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

► **Доказательство.** Пусть прямая l представляет на координатной плоскости уравнение $ax + by + c = 0$ (рис. 201). Чтобы найти длину перпендикуляра MM_1 , опущенного из точки M на прямую l , проведем через точку M до пересечения с прямой l прямые, параллельные осям абсцисс и ординат, которые пересекают прямую l в точках K и N соответственно. Используя уравнение прямой l , найдем координаты этих точек.

Точка K имеет абсциссу x_0 , чтобы найти ее ординату, учтем, что она лежит на прямой l :

$$ax_0 + by_1 + c = 0,$$

поэтому

$$y_1 = -\frac{ax_0 + c}{b}.$$

Значит,

$$K\left(x_0; -\frac{ax_0 + c}{b}\right).$$

Точка N имеет ординату y_0 , а ее абсцисса удовлетворяет условию

$$ax_2 + by_0 + c = 0,$$

поэтому

$$x_2 = -\frac{ay_0 + c}{b}.$$

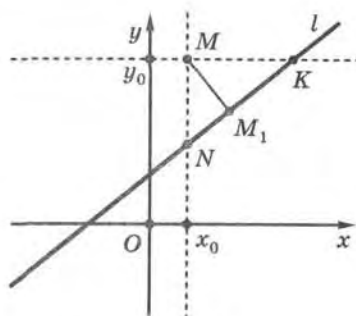


Рис. 201

Значит,

$$K\left(-\frac{by_0 + c}{b}; y_0\right).$$

Расстояние $d(M, l)$ можно найти, если удвоенную площадь треугольника MKN разделить на длину стороны KN :

$$d(M, l) = \frac{2S_{MKN}}{KN} = \frac{MK \cdot MN}{KN}.$$

Найдем MK , MN и KN :

$$MK = \left| -\frac{ax_0 + c}{b} - y_0 \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right|,$$

$$MN = \left| -\frac{by_0 + c}{a} - x_0 \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right|,$$

$$KN = \sqrt{MK^2 + MN^2} = |ax_0 + by_0 + c| \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} =$$

$$= |ax_0 + by_0 + c| \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}.$$

Поэтому

$$d(M, l) = \frac{MK \cdot MN}{KN} =$$

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{b} \right| \cdot \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a} \right| \cdot \frac{1}{|ax_0 + by_0 + c|} \cdot \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC находятся соответственно на прямых $3x - 4y - 19 = 0$, $x + 2y - 13 = 0$ и $7x - y + 14 = 0$. Найдем:

- координаты вершин A , B и C ;
- величину угла A ;
- координаты основания A_1 высоты, проведенной из вершины A ;
- координаты основания B_1 медианы, проведенной из вершины B ;
- координаты основания A_2 биссектрисы, проведенной из вершины A ;
- длину высоты, проведенной из вершины C .

а) Вершина A является точкой пересечения прямых AB и AC . Поэтому ее координаты удовлетворяют как уравнению $3x - 4y - 19 = 0$, так и уравнению $7x - y + 14 = 0$, т. е. удов-

летворяют системе $\begin{cases} 3x - 4y - 19 = 0, \\ 7x - y + 14 = 0, \end{cases}$ решением которой является пара чисел $(-3; -7)$. Поэтому $A(-3; -7)$.

Координаты точек B и C найдем, решая системы $\begin{cases} 3x - 4y - 19 = 0, \\ x + 2y - 13 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 7x - y + 14 = 0, \\ x + 2y - 13 = 0, \end{cases}$ соответственно: $B(9; 2)$ и $C(-1; 7)$.

б) Чтобы найти угол A , рассмотрим треугольник AMN , ограниченный осью абсцисс и прямыми AB и AC , образующими с положительным направлением оси абсцисс углы φ_1 и φ_2 соответственно (рис. 202). Учитывая, что угол CMN , равный φ_2 , является внешним углом треугольника AMN , получим $\angle CMN = \angle A + \angle MNA$, или $\varphi_2 = \angle A + \varphi_1$, так как $\angle MNA = \varphi_1$. Значит, $\angle A = \varphi_2 - \varphi_1$.

Найдем $\operatorname{tg} A$, учитывая, что тангенсы углов φ_1 и φ_2 связаны с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 прямых AB и AC равенствами $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$ и $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1} = \\ &= \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \end{aligned}$$

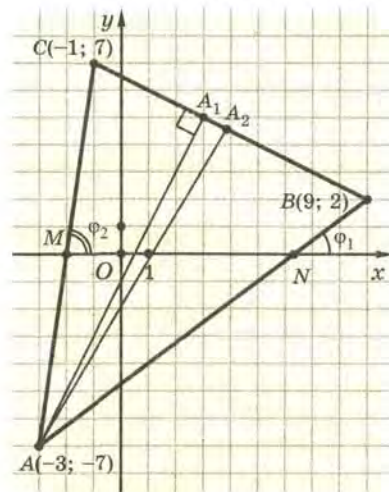


Рис. 202

Учитывая уравнения прямых AB и AC , найдем их угловые коэффициенты k_1 и k_2 и продолжим вычисления:

$$k_1 = \frac{7}{1} = 7; \quad k_2 = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{7 - \frac{3}{4}}{1 + 7 \cdot \frac{3}{4}} = 1.$$

Поэтому $\angle A = 45^\circ$.

в) Поскольку высота AA_1 , проведенная из вершины A , перпендикулярна прямой BC , то угловые коэффициенты k_3 и

k_4 прямых BC и AA_1 связаны равенством $k_3 k_4 = -1$. Поскольку прямая BC задается уравнением $x + 2y - 13 = 0$, или $y = -0,5x + 6,5$, то $k_3 = -0,5$. Значит, $k_4 = 2$ и уравнение высоты AA_1 можно записать в виде $y = 2x + b$. Учтем, что поскольку прямая AA_1 проходит через точку A , то координаты $(-3; -2)$ этой точки должны удовлетворять уравнению $y = 2x + b$, т. е. истинно равенство $-2 = 2(-3) + b$, откуда $b = 4$. Значит, прямая AA_1 задается уравнением $y = 2x + 4$. Координаты точки

A_1 находим как решение системы $\begin{cases} y = 2x + 4, \\ x + 2y - 13 = 0, \end{cases}$ которая задает общие точки прямых BC и AA_1 . Получим $A_1(3; 5)$.

г) Координаты основания B_1 медианы, проведенной из вершины B , найдем как координаты середины отрезка AC :

$$x = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + (-1)}{2} = -2; \quad y = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-7 + 7}{2} = 0.$$

Значит, $B_1(-2; 0)$.

д) Координаты основания A_2 биссектрисы AA_2 , проведенной из вершины A , можно найти с использованием теоремы 10, если знать, в каком отношении k точка A_2 делит отрезок BC . Чтобы найти число k , учтем, что биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $k = CA_2 : A_2B = AC : AB$.

Найдем длины сторон CA и AB , используя формулу расстояния между точками, заданными своими координатами:

$$AC = \sqrt{(-3 - (-1))^2 + (-7 - 7)^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2};$$

$$AB = \sqrt{(9 - (-3))^2 + (2 - (-7))^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15.$$

Значит, $k = 10\sqrt{2} : 15 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогда:

$$\begin{aligned} x = \frac{x_C + kx_B}{1 + k} &= \frac{-1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 9}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-3 + 18\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(-3 + 18\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \\ &= 60\sqrt{2} - 81; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = \frac{y_C + ky_B}{1 + k} &= \frac{7 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{21 + 4\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(21 + 4\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \\ &= 47 - 30\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Получили: $A_2(60\sqrt{2} - 81; 47 - 30\sqrt{2})$.

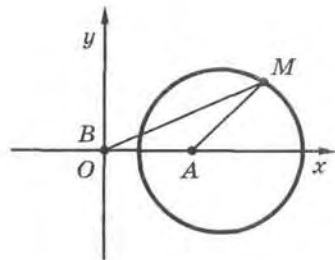


Рис. 203

► Координатный метод часто оказывается удобно применять при решении задач на геометрические места точек.

Пример 3. Найдем геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек равно данному числу k .

Пусть даны две точки A и B и положительное число k (рис. 203).

Пусть $k = 1$. Тогда искомое место — множество таких точек M , что $MA : MB = 1$, т. е. множество точек, равноудаленных от точек A и B . Как мы знаем, это множество — серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Пусть $k \neq 1$. Введем систему координат, выбрав ее начало в точке B и взяв луч BA в качестве положительной полуоси абсцисс. После выбора единичного отрезка точки A и B получат определенные координаты: $A(a; 0)$; $B(0; 0)$.

Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит искомому геометрическому месту. Тогда истинно равенство $MA : MB = k$, равносильное равенству $MA^2 = k^2 \cdot MB^2$. Найдем MA и MB :

$$MA^2 = (a - x)^2 + (0 - y)^2 = (x - a)^2 + y^2;$$

$$MB^2 = (0 - x)^2 + (0 - y)^2 = x^2 + y^2.$$

Значит,

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2 \cdot (x^2 + y^2);$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = k^2 x^2 + k^2 y^2;$$

$$x^2 - k^2 x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - k^2 y^2 = 0;$$

$$(1 - k^2)x^2 - 2ax + (1 - k^2)y^2 = -a^2;$$

$$x^2 - \frac{2a}{1 - k^2}x + y^2 = -\frac{a^2}{1 - k^2};$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{a}{1 - k^2} + \left(\frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1 - k^2}\right)^2 - \frac{a^2}{1 - k^2};$$

$$\left(x - \frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 k^2}{(1 - k^2)^2};$$

$$\left(x - \frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{1 - k}\right)^2.$$

Полученное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $\left(\frac{a}{1 - k^2}; 0\right)$ и радиусом, равным $\frac{ak}{|1 - k|}$. Эту окружность называют окружностью Аполлония по имени



Рис. 204



Рис. 205



Рис. 206

древнегреческого математика Аполлония Пергского (около 260 — около 170 до н. э.) (рис. 204), который установил соответствующий геометрический факт.

Все преобразования, начиная с полученного уравнения окружности $\left(x - \frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{1 - k}\right)^2$, можно провести и в обратном порядке. Поэтому каждая точка этой окружности принадлежит искомому геометрическому месту.

Координатное описание геометрических фигур составляет предмет аналитической геометрии, разработанной в первой половине XVII ст. французскими учеными Рене Декартом (1596—1650) (рис. 205) и Пьером Ферма (1601—1665) (рис. 206).

- ?
1. Какой линией на координатной плоскости представляется линейное уравнение $ax + by = c$?
 2. Каким уравнением задается прямая, проходящая через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$?
 3. Каким отношением связаны угловой коэффициент прямой с углом между ее лучом, расположенным выше оси абсцисс, и положительным направлением этой оси?
 4. Каким уравнением задается окружность с центром $O(a; b)$ и радиусом r ?
 5. Какую линию на координатной плоскости представляет уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$?
 6. По какой формуле находится расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на координатной плоскости?
 7. Как построить точку, делящую данный отрезок в данном отношении $m : n$?
 8. По каким формулам находятся координаты точки, делящей в отношении k отрезок с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$?
 9. По каким формулам находятся координаты середины отрезка с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$?

10. Какой фигурой является геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек равно единице?

11. Какой фигурой является геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек равно данному числу k , не равному единице?

377. Начертите линию, которая определяется уравнением:

- а) $y = -2x + 1,5$; в) $y = \frac{5}{x}$; д) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$;
б) $2y - 3t = 1$; г) $xz = -12$; е) $x^2 - 4x + 5 + y^2 = 2$.

378. Прямая $2x + 3y = 5$ разделяет координатную плоскость на две полуплоскости. Установите, в какой из них находится точка:

- а) $O(0; 0)$; б) $A(-3; 2)$; в) $B(4; 6)$; г) $C(0; 10)$.

379. На прямой, которой принадлежат точки $A(-3; 8)$ и $B(3; -7)$, найдите точку с:

- а) абсциссой 1; в) ординатой 13;
б) абсциссой -2 ; г) ординатой -10 .

380. Найдите расстояние между точками:

- а) $R(4; 25)$ и $S(-5; 15)$; б) $T(-8; 4)$ и $U(0; -3)$.

381. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек:

- а) $A(-1; 3)$ и $B(3; -1)$; б) $K(3; 3)$ и $L(-1; 5)$.

382. Найдите точку пересечения прямых:

- а) $x + 2y = 5$ и $2x + 3y = 8$; б) $2a - 5b = 3$ и $4a + 10b = 6$.

383. Найдите угловой коэффициент прямой, которая:

- а) задана уравнением $2x + 3y = -1$;
б) содержит точки $U(-2; 3)$ и $V(0; 1)$;
в) задана уравнением $y = -3$.

384. Запишите уравнение:

- а) прямой, проходящей через точки $M(-3; 2)$ и $N(2; -3)$;
б) прямой с угловым коэффициентом -2 , проходящей через точку $K(-2; 3)$;
в) окружности с радиусом 7, центр которой находится в точке $A(4; -3)$;
г) окружности, проходящей через точку $A(2; 2)$ и центр которой находится в точке $B(-1; -2)$.

385. Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k , является уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$.

386. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $S(-2; -3)$ и имеющей угловой коэффициент:

- а) -3 ; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 4; д) 0.

387. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $T(-2; -1)$, луч которой, расположенный выше оси абсцисс, образует с положительным направлением этой оси угол, равный:

- а) 30° ; в) 60° ; д) 120° ; ж) 150° ; и) β .
б) 45° ; г) 90° ; е) 135° ; з) 15° ;

388. Найдите уравнение прямой, которая проходит через точку $X(3; -2)$ и:

- а) параллельна оси абсцисс;
б) параллельна оси ординат;
в) образует с осью абсцисс угол в 45° ;
г) образует с осью ординат угол в 60° ;
д) параллельна прямой $y = -x + 2$;
е) перпендикулярна прямой $y = x$.

389. Запишите уравнение окружности с радиусом:

- а) $2\sqrt{2}$, которая проходит через точки $C(-3; 3)$ и $D(1; -1)$;
б) $4\sqrt{5}$, которая проходит через точки $E(-12; -4)$ и $F(4; -4)$.

390. Найдите точку, равноудаленную от точек $A(-3; -2)$ и $B(3; 2)$ и лежащую на:

- а) прямой $y = -x$; в) окружности $x^2 + y^2 = 13$;
б) прямой $y = -x - 2$; г) окружности $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

391. Найдите середины сторон треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $A(3; -7)$; $B(5; 2)$; $C(-1; 0)$;
б) $E(10; 3)$; $F(-5; 13)$; $G(-1; -10)$.

392. Найдите длины медиан треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $I(3; -7)$; $J(5; 2)$; $K(-1; 0)$;
б) $L(3; -2)$; $M(5; 2)$; $N(-1; 4)$.

393. Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ являются смежными вершинами ромба, диагонали которого параллельны координатным осям. Найдите координаты двух других вершин ромба.

394. Точки $I(-4; -7)$, $J(2; 6)$ и $A(3; 1)$ являются смежными вершинами параллелограмма и точкой пересечения его диагоналей соответственно. Найдите координаты двух других вершин параллелограмма.

395. Найдите координаты точек, разделяющих на 5 долей отрезок с концами $B(3; 2)$ и $C(15; 6)$.

396. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках $F(1; 4)$, $G(-5; 0)$ и $H(-2; -1)$.

397. Точка $F(3; -6)$ является вершиной общего угла двух подобных треугольников с коэффициентом подобия, равным 2,5. Найдите координаты двух других вершин большего треугольника, учитывая, что вершины меньшего находятся в точках $G(11; 0)$ и $H(7; 12)$.

398. Найдите координаты точки пересечения общих касательных к окружностям с центрами $Q(4; 3)$ и $O\left(\frac{28}{3}; \frac{25}{3}\right)$ и радиусами, равными 3 и 7 соответственно.

399. Найдите центр тяжести системы, состоящей из трех грузов массами 40 г, 60 г и 100 г, которые находятся в точках $A(4; 2)$, $B(9; -0,5)$ и $C(8; 5)$ соответственно.

400. Найдите координаты центра тяжести четырехугольной однородной пластинки, вершины которой находятся в точках $A(5; 3)$, $B(6; 6)$, $C(11; 9)$ и $E(13; 3)$.

401. Однородную проволоку согнули под прямым углом, стороны которого оказались равными a и b . Найдите центр тяжести полученного тела.

402. Прямая проходит так, что отсекает на оси абсцисс отрезок OA длиной 4 единицы, а на оси ординат — отрезок OB длиной 7 единиц. Найдите координаты основания перпендикуляра, опущенного на эту прямую из начала координат.

403. Найдите угол между прямыми:

- а) $2x - 3y = -6$ и $x - 2y = 11$;
- б) $3a + 2b = 6$ и $2a - b = -10$.

404. На сторонах PQ и PS квадрата $PQRS$ точки A и B выбраны так, что $3AQ = 2PB = RS$. Найдите угол между прямыми AR и BQ .

405. Найдите расстояние до прямой $4x - 3y = -6$ от точки:

- а) $C(8; 6)$; б) $D(-5; 8)$; в) $E(6; -3)$; г) $F(-4; -6)$.

406. Найдите уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямых:

- а) $4x + 3y = 7$ и $4x - 3y = 1$;
- б) $x + 2y = 5$ и $4x + 2y = 23$;
- в) $5x + 12y = -7$ и $12x + 5y = 7$;
- г) $3x + 2y = 15$ и $2x + 3y = 10$.

407. Найдите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около треугольника, вершины которого находятся в точках:

- а) $C(-8; -10)$; $D(-1; 14)$; $E(9; -10)$;
- б) $G(-12; -16)$; $H(8; 32)$; $I(44; -16)$.

408. Вершины треугольника находятся в точках $A(-4; 7)$, $B(4; 1)$, $C(7; 5)$. Найдите:

- а) стороны треугольника;
- б) углы треугольника;
- в) площадь треугольника;
- г) медианы треугольника и координаты их оснований;
- д) высоты треугольника и координаты их оснований;
- е) биссектрисы треугольника и координаты их оснований;
- ж) центры и радиусы окружностей — вписанной в треугольник и описанной около него.

409. Есть две точки, расстояние между которыми равно 2. Найдите геометрическое место таких точек X , что:

- а) $AX^2 - BX^2 = 1$; б) $AX^2 + BX^2 = 10$.

410. На плоскости построен прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для любой точки X плоскости истинно равенство $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$.

411. Докажите, что если для четырех отмеченных на плоскости точек A, B, C, D и произвольной точки X этой плоскости истинно условие $AX^2 + CX^2 = BX^2 + DX^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.

412. На плоскости отмечены две точки P и Q на расстоянии 2. Найдите геометрическое место таких точек Y этой плоскости, что $PY^2 + QY^2 = 10$.

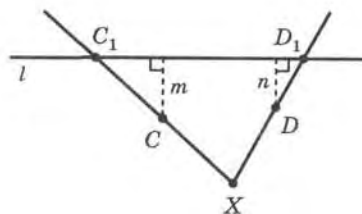


Рис. 207

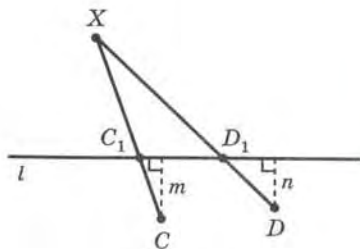


Рис. 208

413. Есть прямоугольный треугольник KLM , катеты которого MK и ML соответственно равны 1 и 3. Найдите геометрическое место таких точек Z этой плоскости, что $ZK^2 + ZL^2 = 2ZM^2$.

414. Напишите уравнение линии, по которой движется точка M , учитывая, что $MC = 2MF$ и:

- а) $C(0; 0)$ и $F(6; 0)$; в) $C(1; -2)$ и $F(-2; 1)$;
б) $C(-3; 0)$ и $F(1; 0)$; г) $C(-5; -2)$ и $F(3; 4)$.

415. Имеются прямая l и точки C и D по одну сторону от нее на расстояниях m и n соответственно. Точка X плоскости выбирается так, что прямые XC и XD пересекают прямую l в точках C_1 и D_1 соответственно и $\frac{XC}{XC_1} + \frac{XD}{XD_1} = k$ (рис. 207 и 208). Найдите геометрическое место таких точек X , учитывая, что:

- а) $m = 3, n = 1, k = 2$;
б) $m = 5, n = 1, k = \frac{3}{2}$;
в) $m = 5, n = 1, k = 3$.

416. Квадрат со стороной 1 движется внутри прямого угла так, что две его соседние вершины находятся на сторонах угла (рис. 209). Установите, по каким линиям движутся две другие вершины квадрата.

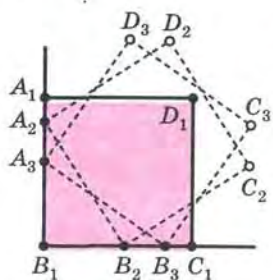


Рис. 209

417. Прямая, проведенная через вершину M прямоугольника $MNKP$, пересекает диагональ NP и прямые KP и NK в точках A, B и C соответственно. Найдите отрезок MA , учитывая, что отрезки MC и MB соответственно равны p и q .

418. Даны две точки P и Q . Найдите геометрическое место таких точек Y , что медиана QQ_1 треугольника YPQ равна стороне PY .

419. Даны две точки M и N . Найдите геометрическое место таких точек Z , что медиана MM_1 треугольника ZMN равна высоте к стороне MN .

420. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки единичной окружности до вершин квадрата, описанного около этой окружности.

421. Через ортоцентр H равностороннего треугольника ABC проведена прямая m , и на нее опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 из вершин A, B, C . Найдите HC_1 , учитывая, что $HA_1 = 6$ и $HB_1 = 1$.

422. Даны прямой угол A и прямая l , проведенная через вершину A . Точки U и V находятся на разных сторонах угла A и удалены от его вершины на 1. Точки U_1 и V_1 — образы точек U и V при симметрии относительно прямой l . Прямая, проведенная через точку U_1 параллельно прямой AV , пересекает прямую, проведенную через точку V_1 параллельно прямой AU , в точке Y . Найдите геометрическое место точек Y .

423. Есть точка M на одной из двух прямых a и b , которые пересекаются под углом в 45° . Точка X выбирается так, что точка M принадлежит прямой X_1X_2 , где X_1 и X_2 — образы точки X при симметрии относительно прямых a и b . Найдите геометрическое место точек X .

424. Даны две точки I и J . На прямой IJ выбирается точка X , и строятся квадраты со сторонами IX и JX по одну сторону от прямой IJ . Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих точки пересечения диагоналей построенных квадратов.

425. Дан квадрат $PQRS$. Найдите геометрическое место точек Z плоскости, для которых $ZP + ZR = ZQ + ZS$.

426. Прямая, проходящая через середину диагонали MO четырехугольника $MNOP$ параллельно прямой NP , пересекает прямую NO в точке A , а прямая, проходящая через середину диагонали NP параллельно прямой MO , пересекает прямую MP в точке B . Докажите, что прямая AB параллельна прямой OP .

427. Найдите геометрическое место центров параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям данного четырехугольника, а вершины лежат на его сторонах.

428. На отрезке MN длиной 17 дм выбрана точка A , и на полученных отрезках-частях MA и NA построены семиугольник $ABCDEFM$ с равными сторонами и углами и пятиугольник $AGHIN$ с равными сторонами и углами (рис. 210). Найдите периметры пятиугольника и семиугольника, учитывая, что периметр семиугольника на 11 дм больше.

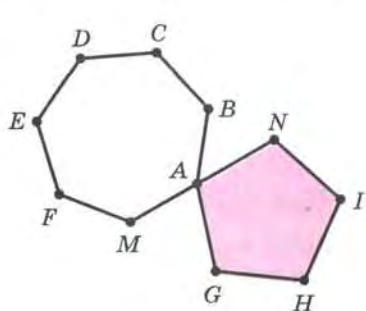


Рис. 210

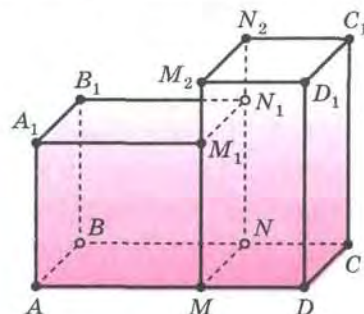


Рис. 211

429. Прямоугольник $ABCD$ с площадью, равной 1950 см^2 , некоторой прямой разделен на два прямоугольника $ABNM$ и $CDMN$, на которых как на основаниях построены прямоугольные параллелепипеды $ABNMA_1B_1N_1M_1$ и $CDMNC_1D_1M_2N_2$ с высотами, равными 35 см и 50 см соответственно (рис. 211). Найдите объемы параллелепипедов, учитывая, что объем второго из них на 4500 см^3 меньше.

430. Имеются две коробки для укладывания конфет, в одной из которых конфеты укладываются в 4 ряда, в другой — в 5 рядов, а в одном ряду той и другой коробки вместе укладывается 12 конфет (рис. 212). Найдите вместимость коробок, учитывая, что вместимость второй коробки на 15 конфет больше.

431. Упростите выражение:

- а) $\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} + \sqrt{18}\right) \cdot 2\sqrt{2}$;
б) $\left(3\sqrt{200} - \frac{1}{2}\sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{50}\right) : \sqrt{8}$;

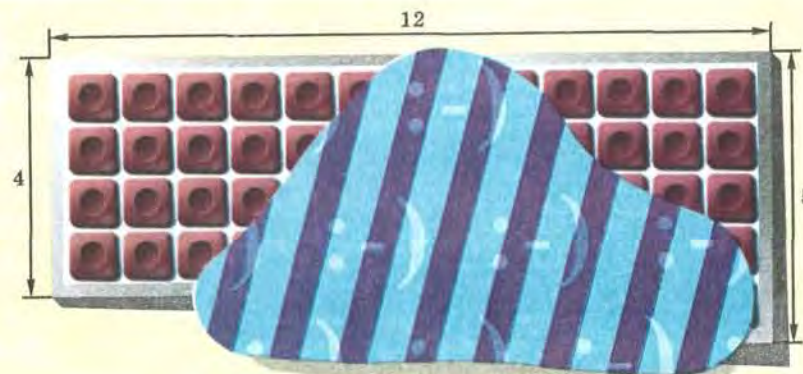


Рис. 212

- в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{15} - \sqrt{27} + \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right) : (\sqrt{3})$;
г) $\left(2\sqrt{2} - 0,6 - \frac{3}{2}\sqrt{0,1}\right) : \left(\frac{1}{4}\sqrt{0,1}\right)$;
д) $\left(\frac{x}{y}\sqrt{\frac{1}{xy}} - \frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}\sqrt{xy}\right) : \left(\frac{x}{y}\sqrt{xy}\right)$;
е) $4u\sqrt{uv^2w^3} - 3w\sqrt{u^3v^2w} - uvw\sqrt{uw}$.

432. Запишите приведенное квадратное уравнение, корни которого равны:

- а) -1 и $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{2}$;
б) $-0,6$ и 0 ; г) $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{3} + 1$.

433. Решите уравнение:

- а) $x^2 - 2x - 35 = 0$; в) $z^2 - 2z - 11 = 0$;
б) $6y^2 - 7y + 2 = 0$; г) $2t^2 + 4t + 3 = 0$.

434. Решите уравнение:

- а) $(a^2 - 1)\sqrt{2a - 1} = 0$; в) $(9 - c^2)\sqrt{2 - c} = 0$;
б) $(b^2 - 4)\sqrt{b + 1} = 0$; г) $(16 - d^2)\sqrt{3 - d} = 0$.

435. Докажите, что:

- а) если $(a - 3)^3 > (3 + a)(3 - a)$, то $a < 3$;
б) если $(3x + y)^3 < (3x - y)^2$, то $xy < 0$;
в) если $k < \frac{x+y}{2}$, $l < \frac{x+z}{2}$, $m < \frac{y+z}{2}$, то $k + l + m < x + y + z$.

436. Вычислите:

- а) $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2$;
 б) $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^3$;
 в) $(-2)^5 - (-2)^4 - (-2)^3 - (-2)^2 - (-2)^1 - (-2)^0$;
 г) $(-2)^{-5} - (-2)^{-4} - (-2)^{-3} - (-2)^{-2} - (-2)^{-1} - (-2)^0$.

* * *

437. Числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 расположены в кружках так, как показано на рисунке 213. За один ход разрешается выбрать два кружка, соединенных между собой, и к каждому из чисел прибавить одинаковые числа, положительные или отрицательные. Установите, можно ли такими ходами из рисунка 213 получить рисунок 214.

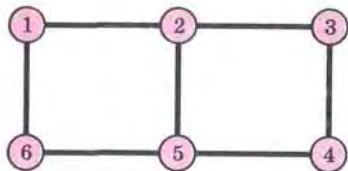


Рис. 213

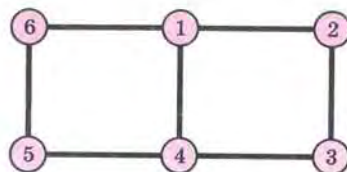


Рис. 214

438. Докажите, что при любых значениях параметров a , b , c хотя бы одно из уравнений $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ имеет корень.

439. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — медиана, из третьей — биссектриса. Докажите, что медиана и биссектриса не могут разделить высоту на три доли.

Раздел IV



РАДИКАЛЫ

11. Корень из числа

Мы знаем, что уравнение

$$x^2 = a$$

при неотрицательном значении a имеет два корня:

$$x_1 = \sqrt{a}; \quad x_2 = -\sqrt{a},$$

где выражение $\sqrt{a}$ обозначает арифметический квадратный корень из числа a , т. е. такое неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Рассмотрим уравнение

$$x^n = a,$$

где a — некоторое действительное число, n — натуральное число. Корень этого уравнения называют *корнем n -й степени из числа a* .

Корнем n -й степени из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a .

Теорема 1. Из положительного числа существует единственный положительный корень степени n .

Доказательство. Пусть a — положительное число. Нужно доказать, что существует такое единственное положительное число x , что

$$x^n = a.$$

► Доказательство существования искомого числа x выходит за пределы тех возможностей, которые теперь у нас есть. Покажем на примере, как можно найти приближенное значение

положительного корня n -й степени из положительного числа с любой степенью точности.

Пусть нужно найти значение корня третьей степени из числа 3. Приближенными значениями этого корня с точностью до единицы являются числа 1 с недостатком и 2 с избытком, так как

$$1^3 = 1 \text{ и } 1 < 3, \text{ а } 2^3 = 8 \text{ и } 8 > 3.$$

Чтобы найти нужное значение с точностью до десятой, следует испытать числа

$$1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9.$$

Поскольку

$$1,4^3 = 2,744 \text{ и } 2,744 < 3, \text{ а } 1,5^3 = 3,375 \text{ и } 3,375 > 3,$$

то нужное значение находится между числами 1,4 и 1,5.

Испытав числа

$$1,41; 1,42; 1,43; 1,44; 1,45; 1,46; 1,47; 1,48; 1,49,$$

найдем, что значение корня третьей степени из числа 3 находится между числами 1,44 и 1,45.

Если этот процесс продолжать далее, то мы будем получать искомое значение корня со все большей точностью. ◀

Докажем единственность положительного корня степени n из положительного числа a . Пусть есть два таких положительных числа x_1 и x_2 , что $x_1^n = a$ и $x_2^n = a$. Тогда $x_1^n = x_2^n$.

Если допустить, что $x_1 > x_2$, то по соответствующему свойству числовых неравенств получим, что $x_1^n > x_2^n$. Это противоречит отношению $x_1^n = x_2^n$.

Также ведет к противоречию и допущение о том, что $x_1 < x_2$. Поэтому для x_1 и x_2 остается единственная возможность: $x_1 = x_2$.

Неотрицательный корень n -й степени из неотрицательного числа называют арифметическим корнем n -й степени.

Корень n -й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Число n называют *показателем корня*, число a — *подкоренным выражением*. Если подкоренное выражение a неотрицательно, то $\sqrt[n]{a}$ обозначает арифметический корень.

Действие нахождения корня n -й степени из числа a называется *извлечением корня степени n* . Это действие является обратным для действия возведения в натуральную степень n (рис. 215).

Корень второй степени называют еще *квадратным корнем*, корень третьей степени — *кубическим корнем*.

Пример 1. а) Запись $\sqrt[4]{81}$ означает корень четвертой степени из числа 81.

$$\sqrt[4]{81} = 3, \text{ так как } 3^4 = 81.$$

б) Запись $\sqrt[5]{32}$ означает корень пятой степени из числа 32.

$$\sqrt[5]{32} = 2, \text{ так как } 2^5 = 32.$$

в) Запись $\sqrt[3]{-27}$ означает корень третьей степени, или кубический корень, из числа -27 .

$$\sqrt[3]{-27} = -3, \text{ так как } (-3)^3 = -27.$$

г) $\sqrt[13]{1} = 1$, так как $1^{13} = 1$.

д) $\sqrt[9]{0} = 0$, так как $0^9 = 0$.

Теорема 2. Из положительного числа:

а) *не существует отрицательного корня нечетной степени;*

б) *существует единственный отрицательный корень четной степени, причем он противоположен положительному корню из данного числа.*

Доказательство. Пусть a — положительное число.

Пусть степень n корня — число нечетное. Допустим, что есть такое отрицательное число x_0 , для которого истинно равенство $x_0^n = a$. Поскольку по условию x_0 — отрицательное число, то число x_0^n также отрицательное как произведение нечетного количества отрицательных чисел. Таким образом, левый компонент x_0^n равенства $x_0^n = a$ — отрицательное число,



Рис. 215

а его правый компонент a — положительное число. Но такое невозможно. Поэтому допущение о существовании отрицательного корня нечетной степени из положительного числа нужно отклонить и признать, что отрицательного корня нечетной степени из положительного числа не существует.

Пусть степень n корня — число четное. По теореме 1 существует единственный положительный корень x_0 уравнения $x^n = a$. Если истинно равенство $x_0^n = a$, то истинно и равенство $(-x_0)^n = a$. А это означает, что $-x_0$ — отрицательный корень уравнения $x^n = a$. Единственность отрицательного корня устанавливается так же, как и единственность положительного корня.

Теорема 3. Из отрицательного числа:

- а) не существует корней четной степени;
- б) существует единственный корень нечетной степени, причем это отрицательное число.

Доказательство. Пусть a — отрицательное число.

Пусть степень n корня — число четное. Допустим, что есть такое число x_0 , для которого истинно равенство $x_0^n = a$. Тогда число x_0^n неотрицательно как произведение четного количества равных чисел x_0 . Получается, что левый компонент x_0^n равенства $x_0^n = a$ — неотрицательное число, а его правый компонент a — отрицательное число. Получили противоречие. Поэтому допущение о существовании корня четной степени из отрицательного числа нужно отклонить и признать, что не существует корней четной степени из отрицательного числа.

Пусть степень n корня — число нечетное. Тогда корень x_0 степени n из отрицательного числа a не может быть неотрицательным, так как в противном случае в равенстве $x_0^n = a$ левый компонент x_0^n был бы неотрицательным, а правый компонент a отрицательным.

Поскольку a — число отрицательное, то противоположное число $-a$ — положительное. В соответствии с теоремой 1 существует положительный корень x_0 уравнения $x^n = -a$, т. е. истинно равенство $x_0^n = -a$. Тогда $-x_0^n = a$. Поскольку по условию число n нечетно, то $(-x_0)^n = -x_0^n$. Значит, $(-x_0)^n = a$. А это и означает, что отрицательное число $-x_0$ есть корень нечетной степени n из отрицательного числа a .

Единственность отрицательного корня нечетной степени из отрицательного числа устанавливается так же, как и единственность положительного корня.

Таким образом, если $a \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение при любом натуральном значении n , как четном, так и нечетном, а если $a < 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение только при нечетном натуральном значении n .

По определению корня при каждом значении a , при котором выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение, истинно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Следствие 1. Корни нечетной степени n из противоположных чисел являются противоположными числами:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \text{ если } n \text{ — нечетное число.}$$

Действительно, если n — нечетное число, то истинное равенство $(-\sqrt[n]{a})^n = -a$ означает, что число $-\sqrt[n]{a}$ является значением корня степени n из числа $-a$: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Следствие 2.

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число,} \\ |a|, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число.} \end{cases}$$

Рассмотрим примеры решения уравнений вида $x^n = a$.

Пример 2. Решим уравнение $a^5 = 7$.

Уравнение имеет единственный корень. Он является положительным числом, пятая степень которого равна 7, т. е. числом $\sqrt[5]{7}$.

Число $\sqrt[5]{7}$ иррациональное. С помощью микрокалькулятора находим, что с точностью до тысячной оно равно 1,4758.

Пример 3. Решим уравнение $b^4 = 17$.

Уравнение имеет два корня, которые являются противоположными числами. Положительный корень — это положительное число, четвертая степень которого равна 17, т. е. число $\sqrt[4]{17}$. Отрицательный корень — число $-\sqrt[4]{17}$.

Числа $\sqrt[4]{17}$ и $-\sqrt[4]{17}$ иррациональные. С помощью микрокалькулятора находим, что с точностью до тысячной они равны 2,0305 и -2,0305.

Пример 4. Решим уравнение $a^7 = -279$.

Уравнение имеет единственный корень. Он является отрицательным числом, седьмая степень которого равна -279,

т. е. числом $\sqrt[7]{-279}$, или, используя представление с помощью арифметического корня, числом $-\sqrt[7]{279}$.

Число $-\sqrt[7]{279}$ иррациональное. Его десятичное приближение с точностью до тысячной равно $-2,2355$.

1. Какое число называется корнем степени n из числа a ?
 2. Какое действие называют извлечением корня?
 3. Какой корень называют квадратным; кубическим?
 4. Что называют показателем корня; подкоренным выражением?
 5. Какой корень называют арифметическим корнем степени n ?
 6. Какова область определения выражения $\sqrt[n]{a}$ при четном значении n ; при нечетном значении n ?
 7. Как корень нечетной степени из отрицательного числа выразить с помощью арифметического корня?
 8. Чему равно значение выражения $\sqrt[n]{a^n}$ при различных значениях n ?

440. Докажите, что:

- а) $\sqrt[4]{16} = 4$; в) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$;
 б) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$; г) $\sqrt[4]{-\frac{16}{81}} = -\frac{2}{3}$.

441. Найдите значение корня:

- а) $\sqrt[15]{1}$; е) $\sqrt[4]{0,0625}$;
 б) $\sqrt[3]{125}$; ж) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$;
 в) $\sqrt[4]{625}$; з) $\sqrt[3]{-0,027}$;
 г) $\sqrt[7]{-1}$; и) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$;
 д) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; к) $\sqrt[4]{7\frac{49}{81}}$.

442. Найдите значение выражения:

- а) $3\sqrt{196}$; г) $-0,2\sqrt[4]{81}$;
 б) $5\sqrt[3]{1000}$; д) $-3 + 7\sqrt[4]{0,0081}$;
 в) $0,5\sqrt[4]{10\,000}$; е) $\sqrt[5]{-0,03125} + \sqrt[9]{\frac{1}{512}}$.

443. Найдите значение степени:

- а) $(\sqrt{25})^2$; д) $(2\sqrt[4]{4})^4$; и) $(5\sqrt[3]{-7})^3$;
 б) $(\sqrt[3]{36})^3$; е) $(-3\sqrt[3]{9})^3$; к) $(5\sqrt[4]{11})^4$;
 в) $(\sqrt[5]{115})^5$; ж) $(-\sqrt[7]{23})^7$; л) $(2\sqrt[3]{-3})^3$;
 г) $(\sqrt[7]{-11})^7$; з) $(-\sqrt[8]{5})^8$; м) $(-3\sqrt[5]{-2})^5$.

444. Найдите устно арифметический квадратный корень из числа:

- а) 1; в) 289; д) $\frac{25}{121}$;
 б) 25; г) 225; е) $\frac{49}{400}$.

445. Найдите устно арифметический кубический корень из числа:

- а) 125; б) $\frac{1}{27}$; в) 0,027; г) $\frac{8}{27}$; д) $\frac{64}{125}$.

446. Найдите арифметический корень четвертой степени из числа:

- а) 0; б) 16; в) $\frac{16}{81}$; г) $29\frac{52}{81}$.

447. Вычислите:

- а) $\sqrt[6]{36^3}$; г) $\sqrt[3]{-35^3}$; ж) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$;
 б) $\sqrt[5]{-1024}$; д) $\sqrt[3]{11^6}$; з) $\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}$;
 в) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; е) $\sqrt[7]{-8^7}$; и) $\sqrt[3]{-12\frac{19}{27}}$.

448. Вычислите:

- а) $(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2$; в) $(\sqrt{5+\sqrt{23}} + \sqrt{5-\sqrt{23}})^2$;
 б) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; г) $\sqrt{6-\sqrt{20}} \cdot \sqrt[3]{-0,001}$.

449. Решите уравнение:

- а) $a^5 = -243$; в) $z^4 = 10$; д) $u^5 = 11$;
 б) $x^6 = \frac{1}{64}$; г) $x^3 = 5$; е) $a^{10} = 2048$.

450. Сколько есть натуральных чисел n , удовлетворяющих неравенству:

а) $2005 < \sqrt{n} < 2006$; б) $2005 < \sqrt[3]{n} < 2006$?

451. Найдите, при каких значениях переменной имеет значение выражение:

а) $\sqrt[6]{y}$; в) $\sqrt[8]{-e}$; д) $\sqrt[11]{\frac{5}{3-y}}$; ж) $\frac{d}{\sqrt[6]{d^2-4}}$;
б) $\sqrt[7]{y}$; г) $\sqrt[10]{x-2}$; е) $\sqrt[14]{\frac{t-2}{t+2}}$; з) $\frac{\sqrt[8]{2f^2-3}}{\sqrt[15]{f^2-25}}$.

452. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x-7}$; б) $c = \sqrt[12]{3t^2+5t-2}$; в) $p = \sqrt[9]{c^2+c+1}$.

453. Что можно сказать о выражении a , учитывая, что:

- а) квадратный корень из выражения a имеет два значения;
б) никакое положительное число не является значением выражения $\sqrt[5]{a}$?

454. Укажите, при каких значениях переменной истинно равенство:

а) $\sqrt{a^2} = a$; в) $\sqrt[5]{b^5} = b$;
б) $\sqrt[3]{x^3} = x$; г) $\sqrt[18]{y^{18}} = y$.

455. Упростите:

а) $\sqrt{(4-x)^6}$, если $x \leq 4$; $x > 4$;
б) $\sqrt[3]{(a-3)^3}$, если $a \geq 3$; $a < 3$.

456. Упростите:

а) $\sqrt[3]{(a-2)^3}$; в) $\sqrt[8]{(2c^2-3c+1)^8}$;
б) $\sqrt[4]{(b+2)^4}$; г) $\sqrt[9]{(2c^3-3c+1)^9}$.

457. Найдите:

- а) величину вклада в a р. через n лет, учитывая, что годовая процентная ставка составляет p %;
б) годовую процентную ставку, учитывая, что величина вклада удвоится через 20 лет.

458. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{24-7a} = 3$; б) $\sqrt[4]{4b-3} = -1$; в) $\sqrt{e^2-1} = 4$.

459. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(a+5)^2} = -5-a$;
б) $\sqrt[4]{(1-2b)^8} = (1-2b)^2$;
в) $\sqrt[6]{(c+2c-3)^6} = c^2+2c-3$;
г) $\sqrt[8]{(8-4d-d^2)^8} = d^2+4d-8$.

460. а) Упростите выражение $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2}$;

б) постройте график функции $y = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2}$;

в) решите уравнение $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(4-x)^2} = 2$.

461. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{(x-1)^2}$; в) $A = \sqrt{y^6}$;
б) $z = \frac{\sqrt[4]{t^4}}{t}$; г) $K = -\sqrt[4]{a^8}$.

462. Упростите:

а) $\sqrt{\frac{3a^2b}{4}}$; в) $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{27m^2n^5}{16e^3f^3}}$;
б) $\sqrt{49(m-n)^4}$; г) $\frac{3i}{2j} \sqrt{\frac{16j^3}{27i^4}}$.

463. Вычислите с точностью до десятичной значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{4} \sqrt{28} - \sqrt{7} + \frac{1}{2} \sqrt{45}\right) - \left(\sqrt{20} - \frac{1}{4} \sqrt{98} - \sqrt{5}\right)$;
б) $\left(\frac{1}{2} \sqrt{72} - \sqrt{216} + \sqrt{54}\right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{50}\right)$.

464. Упростите рациональное выражение:

а) $(3y^{-2} - 2x^{-1}) \left(\frac{y^{-2}}{3^{-1}} + \frac{1}{2^{-1}x}\right) \left(4x^{-2} + \frac{y^{-4}}{3^{-2}}\right)$;
б) $\left(n^{-2} + \frac{m^{-3}}{2^{-1}}\right) \left(\frac{1}{2^{-1}m^3} - n^{-2}\right) \left(n^{-4} + \frac{4}{m^6}\right)$.

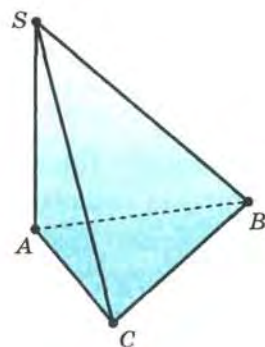


Рис. 216

465. Ребро SA пирамиды $SABC$ равно 10 и перпендикулярно ребрам AB и AC (рис. 216). Найдите полную поверхность пирамиды, учитывая, что углы ASC , ASB , BSC соответственно равны 30° , 45° , 60° .

466. Найдите площадь параллелограмма, учитывая, что его диагональ и углы, которые она образует со сторонами, равны d , α и β .

467. Нигерия — крупнейшая по населению страна Африки, а Лагос, Кано, Ибадан, Кадуна — самые большие ее города (рис. 217). Население Ибадана относится к населению Кано как $18:19$ и в два раза меньше уменьшенного на 160 тыс. чел. населения Кадуны. Население Лагоса на 1531 тыс. чел. больше удвоенного населения Кано и на 243 тыс. чел. больше общего насе-



Рис. 217

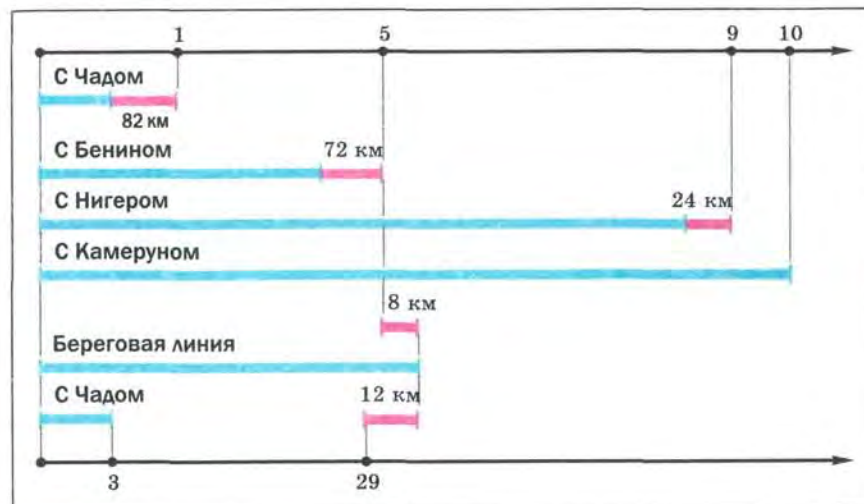


Рис. 218

ления трех других городов. Сколько тысяч человек живет в городах Лагос, Кано, Ибадан, Кадун?

468. Нигерия граничит с Бенином, Камеруном, Чадом, Нигером и имеет определенную береговую линию (см. рис. 217). Найдите длины указанных границ и береговой линии, учитывая, что отношения между ними изображены на схеме, показанной на рисунке 218.

469. Для каких натуральных значений переменной n числа $1, 2, 3, \dots, 4n$ можно разбить на n групп по 4 числа так, что в каждой группе одно из чисел равно среднему арифметическому трех остальных?

470. На координатной плоскости построены две параболы: $y = x^2 + 5$ и $y = -x^2 + 4x$. К ним проведены две общие касательные. Докажите, что точки касания являются вершинами параллелограмма.

471. Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом 24° при вершине боковая сторона больше удвоенного основания.

12. Свойства арифметического корня

Мы знаем, что квадратный корень имеет ряд свойств:

если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;

если $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Аналогичные свойства имеет корень n -й степени и при $n > 2$.

Теорема 4. При любом натуральном значении n :

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если $a \geq 0$ и $b > 0$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Докажем, что $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Для этого в соответствии с определением арифметического корня нужно доказать, что:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Поскольку $a \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет значение, и это значение неотрицательно. Также поскольку $b \geq 0$, то выражение $\sqrt[n]{b}$ имеет неотрицательное значение. Поэтому и выражение $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ имеет неотрицательное значение.

Далее по свойству натуральной степени произведения и определению корня получим

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Доказательство равенства $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ проводится аналогично.

Следствие 1. При любом нечетном натуральном значении n :

а) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, если a и b — любые числа;

б) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, если a — любое число и $b \neq 0$.

Действительно, если, например, $a \geq 0$ и $b < 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \stackrel{(1)}{=} \stackrel{(1)}{=} -\sqrt[n]{\frac{a}{-b}} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{-b}} \stackrel{(3)}{=} -\frac{\sqrt[n]{a}}{-\sqrt[n]{b}} \stackrel{(4)}{=} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Здесь использованы: (1) и (4) — следствие 1 из параграфа 11, (2) — теорема 4, (3) — свойство дроби.

Теорема 4 дает правила извлечения корня из произведения и из дроби:

чтобы найти корень из произведения, можно найти корни из отдельных множителей и полученные числа перемножить;

чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь его отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.

Прочтение тождеств из теоремы 4 справа налево:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \text{ и } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

дает правила умножения и деления корней с одинаковыми показателями:

чтобы перемножить (разделить) корни с одинаковыми показателями, можно перемножить (разделить) их подкоренные выражения и извлечь корень из полученного произведения (частного).

Пример 1. а) $\sqrt[4]{81 \cdot 10\,000} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{10\,000} = 3 \cdot 10 = 30$;

б) $\sqrt[3]{8 \cdot (-27) \cdot 125} = -\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = -\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = -2 \cdot 3 \cdot 5 = -30$;

в) $\sqrt[4]{7 \frac{58}{81}} = \sqrt[4]{\frac{625}{81}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$;

г) $\sqrt[3]{\frac{378}{14}} = \sqrt[3]{\frac{378}{14}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Теорема 5. Если $a \geq 0$, то при любых натуральных значениях n и m истинны равенства $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Доказательство. Пусть $a \geq 0$. Тогда

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Докажем второе тождество. Выражение $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ имеет значение, причем это значение неотрицательно. Поскольку

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = ((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a,$$

то выражение $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ является значением корня степени mn из числа a : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Следствие 2. Если n и m — нечетные числа, то при любом значении a истинны равенства $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Действительно, если, например, $a \leq 0$ и n — нечетное число, то

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{-\sqrt[n]{-a}} = -\sqrt[m]{\sqrt[n]{-a}} = -\sqrt[mn]{-a} = \sqrt[mn]{a}.$$

Теорема 5 позволяет сформулировать правило возведения корня в степень и правило извлечения корня из корня:

чтобы возвести корень в степень, можно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив показатель корня прежним;

чтобы извлечь корень из корня, можно перемножить показатели корней, оставив подкоренное выражение без изменений.

Пример 2. а) $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$;

б) $(\sqrt[3]{-4})^5 = \sqrt[3]{(-4)^5} = \sqrt[3]{-2^{10}} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = -8\sqrt[3]{2}$;

в) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[10]{3}$.

Следствие 3. Если $a \geq 0$, то при любых натуральных значениях m , n и k истинно равенство $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Действительно:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{km}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Доказанное утверждение выражает **основное свойство корня**:

если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.

Пример 3. а) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \cdot 3} = \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$.

Можно доказать, что если m , n и k — нечетные числа, то при всех значениях a истинно равенство $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Теорема 6. Если $a \geq b$ и $b \geq 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любом натуральном значении n .

► **Доказательство.** Пусть $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Тогда выражения $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ имеют значения при любом значении n .

Пусть $a > b$. Допустим, что $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$. Возведя обе части этого неравенства с неотрицательными компонентами в n -ю степень, получим $a \leq b$. Но это противоречит условию $a > b$.

Пусть $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Возведя обе части этого неравенства с неотрицательными компонентами в n -ю степень, получим $a > b$.

Следствие 4. Если n — нечетное число, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любых значениях a и b .

Действительно, если $a < 0$ и $b < 0$, то $-a > 0$ и $-b > 0$. Неравенство $-a < -b$ по уже доказанному равносильно неравенству $\sqrt[n]{-a} < \sqrt[n]{-b}$, или неравенству $-\sqrt[n]{a} < -\sqrt[n]{b}$, или неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Получили, что если $a < 0$ и $b < 0$, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Равносильность неравенств в случаях, когда числа a и b имеют разные знаки и когда одно из чисел равно нулю, устанавливается аналогично. ◀

- ?
1. Сформулируйте правила извлечения корня из произведения для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 2. Сформулируйте правила извлечения корня из дроби для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 3. Сформулируйте правила умножения корней с одинаковыми показателями для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 4. Сформулируйте правила возведения корня в степень для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.
 5. Сформулируйте правила извлечения корня из корня для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.

6. Сформулируйте основное свойство корня.

7. Сформулируйте теорему, связывающую неравенства $a > b$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ для неотрицательных подкоренных выражений; для нечетного показателя корня.

472. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; в) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$; д) $\sqrt[3]{0,001 \cdot 343}$;
б) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4}$; г) $\sqrt[3]{2^{12} \cdot 3^6}$; е) $\sqrt[3]{9 \cdot 24}$.

473. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; г) $\sqrt[5]{5^2 \cdot 7^3} \cdot \sqrt[5]{5^3 \cdot 7^2}$;
б) $\sqrt[3]{121} \cdot \sqrt{11}$; д) $\sqrt[3]{12 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[3]{12 + \sqrt{19}}$;
в) $\sqrt[4]{2 \cdot 49} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 49}$; е) $\sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}}$.

474. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{3^6}{5^3}}$; в) $\sqrt[3]{2 \frac{10}{27}}$; г) $\sqrt[5]{7 \frac{19}{32}}$.

475. Найдите значение выражения:

- а) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{48}}$; г) $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[6]{6\,000\,000}}$.

476. Установите, во сколько раз значение выражения:

- а) $\sqrt{63}$ больше значения выражения $\sqrt{7}$;
б) $\sqrt[3]{\frac{7}{216}}$ меньше значения выражения $\sqrt[3]{\frac{7}{64}}$.

477. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt{197^2 - 28^2}$; г) $\sqrt[3]{234^2 - 109^2}$;
б) $\sqrt{173^2 - 52^2}$; д) $\sqrt[6]{8177^2 - 7448^2}$;
в) $\sqrt[4]{440,5^2 - 184,5^2}$; е) $\sqrt[5]{23\,344^2 - 23\,312^2}$.

478. Найдите катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет и гипотенуза соответственно равны:

- а) 391 и 409; в) 441 и 1512;
б) 312 и 480; г) 1197 и 1995.

479. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{2 \frac{1}{4}}$; в) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}}$;
б) $\sqrt[4]{15 \frac{5}{8}} : \sqrt[4]{\frac{2}{5}}$; г) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2$.

480. Вычислите:

- а) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt[3]{\sqrt{64}}$;
б) $\sqrt[3]{3 \frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4 \frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$;
в) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$;
г) $\sqrt[4]{17 - \sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17 + \sqrt{33}}$.

481. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{0,125 \cdot 216}$; г) $\sqrt[4]{0,0032 \cdot 1024}$;
б) $\sqrt[3]{686 \cdot 4}$; д) $\sqrt[7]{\frac{1}{128} \cdot 2187}$;
в) $\sqrt[5]{\frac{1}{243} \cdot 32}$; е) $\sqrt[4]{1,5 \cdot 3 \frac{3}{8}}$.

482. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;
б) $\sqrt[3]{3 \frac{3}{8}}$; д) $(\sqrt{20} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$;
в) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$; е) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.

483. Установите, при каких значениях переменной истинно равенство:

- а) $\sqrt{a^2 - 4} = \sqrt{a - 2} \cdot \sqrt{a + 2}$;
б) $\sqrt[4]{(b - 3)(7 - b)} = \sqrt[4]{b - 3} \cdot \sqrt[4]{7 - b}$;
в) $\sqrt[3]{(c + 2)(c - 4)} = \sqrt[3]{c + 2} \cdot \sqrt[3]{c - 4}$;
г) $\sqrt[6]{d(d + 2)(d + 4)} = \sqrt[6]{d} \cdot \sqrt[6]{d + 2} \cdot \sqrt[6]{d + 4}$;
д) $\sqrt[8]{(x - l)^3} = (\sqrt[8]{x - l})^3$;
е) $\sqrt[9]{(g - 7)^4} = (\sqrt[9]{g - 7})^4$.

484. Упростите:

- а) $\sqrt{25a^2}$; г) $\sqrt[3]{82^{12}}$;
 б) $\sqrt[4]{81c^8}$; д) $\sqrt[3]{2xy} \cdot \sqrt[3]{4x^2y} \cdot \sqrt[3]{27y}$;
 в) $\sqrt[5]{32x^{15}}$; е) $\frac{\sqrt[5]{k^3l^2} \cdot \sqrt[5]{3k^2l^3}}{\sqrt[5]{3kl}}$.

485. Представьте дробью выражение:

- а) $\sqrt{\frac{3}{49}}$; б) $\sqrt[3]{5\frac{2}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{b^6}{5}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{8}{d^{16}}}$.

486. Упростите:

- а) $\sqrt[5]{x^6y^7} : \sqrt[5]{xy^2}$; в) $\sqrt[3]{\frac{3c}{d^2}} : \sqrt[3]{\frac{d}{9c^2}}$;
 б) $\sqrt[3]{81a^4b} : \sqrt[3]{3ab}$; г) $\sqrt[4]{\frac{2e}{f^3}} : \sqrt[4]{\frac{f}{8e^3}}$.

487. Упростите:

- а) $10\sqrt{3^5}$; д) $\sqrt[6]{\frac{8}{125}}$;
 б) $12\sqrt{5^4}$; е) $\sqrt[2]{\frac{113}{256}}$;
 в) $12\sqrt{(-5)^4}$; ж) $\sqrt[16]{(-\frac{81}{256})^4}$;
 г) $8\sqrt{x^4}$; з) $\sqrt[15]{(-\frac{81}{343})^5}$.

488. Упростите:

- а) $\sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3}$; г) $\sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^3}$;
 б) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2}$; д) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$;
 в) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; е) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2}$.

489. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5^3}$; г) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{50}$; ж) $\sqrt[3]{4^{27} \cdot (\frac{1}{2})^{18}}$;
 б) $\sqrt[4]{7^4 \cdot 11^4}$; д) $\sqrt[7]{\frac{1}{3^7} \cdot 17^7}$; з) $\sqrt[4]{\frac{1}{3^8} \cdot 3^{12}}$;
 в) $\sqrt[4]{8 \cdot 162}$; е) $\sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt{0,2}$;

490. Упростите:

- а) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[4]{5\sqrt{8}}$; д) $\sqrt[5]{3\sqrt{-3}}$;
 б) $\sqrt[5]{3\sqrt{10}}$; г) $\sqrt[4]{3\sqrt{625}}$; е) $\sqrt{-3\sqrt{-64}}$.

491. Упростите:

- а) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$; в) $\sqrt[5]{e^2} \cdot \sqrt[15]{e^4}$;
 б) $\sqrt[3]{c^4} : \sqrt[3]{c^2}$; г) $\sqrt[12]{g^5} : \sqrt[4]{g}$.

492. Упростите:

- а) $\sqrt{((a-1)(a+1))^4}$; г) $\sqrt[4]{((e-1)(e+1))^{12}}$;
 б) $\sqrt[12]{(b^2-b+1)^6}$; д) $\sqrt[3]{(-d^2+d-1)^6}$;
 в) $\sqrt[3]{((c-1)(c+1))^6}$; е) $\sqrt[8]{(f^2-5f+6)^4}$.

493. Упростите выражение:

- а) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[8]{4\sqrt{12}}$; д) $\sqrt[5]{4\sqrt{64}}$;
 б) $\sqrt[3]{5\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; е) $\sqrt[3]{b\sqrt{b}}$.

494. Выполните действия:

- а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$; в) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$;
 б) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{3}}$; г) $a\sqrt{4a} \cdot \sqrt[4]{4a} \cdot \sqrt[8]{4a^3}$.

495. Упростите выражение:

- а) $\sqrt[4]{7^2}$; б) $\sqrt[12]{36^3}$; в) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$; г) $\sqrt[4]{a\sqrt{a}}$.

496. Найдите значение выражения:

- а) $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[9]{8+\sqrt{37}}$; в) $\sqrt{4-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6+4\sqrt{2}}$;
 б) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$.

497. Вычислите:

- а) $\sqrt[3]{64a^3b^6}$; в) $\sqrt[3]{2kl^2} \cdot \sqrt[3]{4k^2l}$;
 б) $\sqrt[5]{32c^{10}d^{20}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{sf}{r}} \cdot \sqrt[4]{\frac{s^3r}{f}}$.

498. Вычислите:

- а) $(\sqrt[6]{7^3})^2$; б) $(\sqrt[10]{32})^2$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$; г) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$.

499. Упростите:

а) $\sqrt[3]{\frac{xy^2}{z}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^5y}{z^2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{k^2l^2m} \cdot \sqrt[4]{k^3l^3m^2}}{\sqrt[4]{klm^3}}$; в) $(\sqrt[5]{8^3})^5 \cdot (\sqrt[3]{t^2})^3$.

500. Упростите:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{c^{18}}} + (\sqrt[3]{\sqrt[3]{c^4}})^3$; б) $2\sqrt{\sqrt{s^4t^8} - (\sqrt[3]{\sqrt{s^3t^6}})^2}$; в) $(\sqrt[4]{n^8m^2})^4 - (\sqrt[4]{n^2m^8})^2$; г) $\sqrt{(3,45)^{-9}} : \sqrt{(4,58)^{-9}}$.

501. Докажите равенство:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$;
б) $\sqrt{7-2\sqrt{6}} - \sqrt{7+2\sqrt{6}} = -2$.

502. С помощью микрокалькулятора с точностью до тысячной найдите значение выражения:

а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt[4]{24}$; в) $\sqrt{1,62}$; г) $\sqrt[4]{1,62}$; д) $\sqrt[4]{5,128}$; е) $\sqrt[8]{5,128}$.

503. С точностью до десятитысячной с помощью микрокалькулятора найдите значение выражения:

а) $\sqrt{8 \cdot \sqrt{15}} : \sqrt{5}$; б) $\sqrt{(1,35)^{-7}} \cdot \sqrt{(0,45)^{-7}}$.
в) $\sqrt{6,8 \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{0,38}}$;

504. Сравните значения выражений:

а) $\sqrt[6]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[6]{8}$; в) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{2\sqrt{3}}$.

505. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[10]{10} - \sqrt[11]{11}$;
в) $\sqrt[4]{4} - \sqrt[5]{5}$; г) $\sqrt[20]{20} - \sqrt[21]{21}$.

506. Упростите:

а) $\frac{\sqrt{q} - \sqrt{p}}{\sqrt[4]{q} - \sqrt[4]{p}} - \frac{\sqrt{q} + \sqrt[4]{qp}}{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{p}}$;
б) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}} \right) \cdot (\sqrt{m} - \sqrt{n})$;
в) $\frac{e-f}{\sqrt[3]{e} - \sqrt[3]{f}} - \frac{e+f}{\sqrt[3]{e} + \sqrt[3]{f}}$;
г) $\left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{xy} \right) : (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2$.

507. Вынесите множитель за знак квадратного корня:

а) $\sqrt{4 \cdot 3}$; б) $\sqrt{288}$; в) $\sqrt{3a^2 \cdot b^4}$; г) $\sqrt{2(r+s)^2 \cdot t^4}$.

508. Внесите множитель под знак квадратного корня:

а) $4\sqrt{3}$; б) $-\frac{2}{5}\sqrt{125}$; в) $a\sqrt{2}$; г) $-2m\sqrt{m^3n}$.

509. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\sqrt{\frac{1}{3}}$; б) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{15}}$; в) $\frac{\sqrt{3xy}}{\sqrt{2yz}}$; г) $3x^3z\sqrt{\frac{3}{xz}}$.

510. Избавьтесь от иррациональности в числителе:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{125}}$; в) $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$; г) $-2m\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{3np}}$.

511. Ребро AM пирамиды $AMNP$ перпендикулярно ребрам MN и MP (рис. 219). Найдите боковую поверхность пирамиды и площадь ее основания, учитывая, что:

а) $AM = 1$, $NP = 2$, $\angle ANP = 60^\circ$, $\angle APN = 45^\circ$;
б) $AN = 30$, $AP = 20$, $AM = 10$, $\angle MPN = 120^\circ$.

512. Углы B , C , стороны AB , BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 120° , 30° , 50 , 90 . Найдите другие стороны и отрезки диагоналей, на которые они разделяются точкой пересечения.

513. На отрезке RS длиной 14 м выбрали точку T и на отрезках-частях RT и ST построили параллелограммы $RTDC$ и $STEF$ с площадями 56 м² и 30 м² (рис. 220). Найдите, на сколько основание RT первого параллелограмма больше основания ST второго параллелограмма, учитывая, что высота первого параллелограмма на 2 м больше.

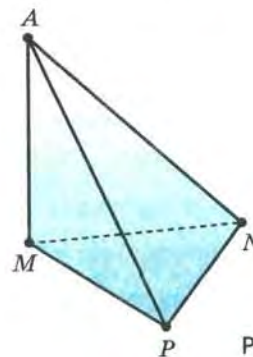


Рис. 219

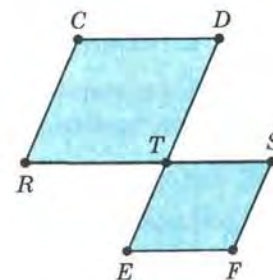


Рис. 220



Рис. 221

514. Из Могилева в Гомель (рис. 221) выехала машина, и, после того как она приехала в Калинино, из Гомеля выехал велосипедист. Когда велосипедист приехал в Калинино, то оказалось, что после выезда машины прошло 3,5 ч. Учитывая, что скорость велосипедиста была на 61 км/ч меньше, найдите:

- а) скорости машины и велосипедиста;
- б) время, которое были в дороге машина и велосипедист.

515. Один рабочий собрал 30 табуреток, второй — 24 табуретки. Найдите производительность труда первого и второго рабочих, учитывая, что общее время их работы составило 14 ч, а производительность первого на 2 табуретки в час больше.

* * *

516. Клетки таблицы размером 15×15 окрашены в три цвета: черный, красный и желтый. Докажите, что есть две строки таблицы, в которых поровну клеток хотя бы одного цвета.

517. Докажите, что для любых чисел a и b истинно неравенство

$$ab(a+b)^2 \leq 2a^4 + 2b^4.$$

518. На полуокружности с диаметром MN отметили ее середину K и на дуге KN выбрали точку X . На луче MX отложили отрезок MY , равный NX . Найдите угол HKY .

13. Степень с рациональным показателем

Мы знаем, какой смысл имеет выражение a^x при целых значениях переменной x :

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} \text{ при } n > 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ при } a \neq 0 \text{ и } n \geq 1.$$

Обобщим теперь понятие степени на случай дробного показателя так, чтобы для дробных показателей, как и для целых, выполнялось тождество $(a^m)^n = a^{mn}$. Тогда будут истинны равенства $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ и $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Это свидетельствует о целесообразности следующего определения степени с дробным показателем.

Если $a > 0$ и x — рациональное число, представленное дробью $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число, то

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

если $a = 0$ и x — положительное рациональное число, то

$$a^x = 0.$$

Приведем примеры применения этого определения.

Пример 1. а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[7]{\frac{8}{27}};$

б) $5^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{5} = \sqrt[11]{5^{-1}} = \sqrt[11]{\frac{1}{5}};$

в) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1,6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{16}{10}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{6}\right)^8} = \sqrt[5]{\frac{1}{6^8}};$

г) $0^{\frac{13}{213}} = 0.$

Мы знаем, что каждое рациональное число может быть представлено разными дробями: например, число 0,6 представляется дробями $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{12}{20}$ и т. д.

Теорема 7. Значение степени с рациональным показателем не зависит от того, какой дробью представлен показатель этой степени.

Доказательство. Пусть x — дробное рациональное число. Учтем то, что каждое такое число единственным образом представляется несократимой дробью $\frac{m}{n}$, у которой числитель m — целое число, а знаменатель n — натуральное число. Все другие представления числа x получаются из дроби $\frac{m}{n}$ умножением ее числителя и знаменателя на некоторое нату-

ральное число. Поэтому для доказательства утверждения теоремы достаточно доказать, что $a^{\frac{mk}{nk}} = a^{\frac{m}{n}}$. Имеем:

$$a^x = a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Пусть x — целое число k , представленное дробью. Тогда числитель этой дроби кратен ее знаменателю, т. е. $k = \frac{kn}{n}$. Значит,

$$a^{\frac{kn}{n}} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = a^k.$$

Распространим свойства степени с целым показателем на степень с рациональным показателем.

Теорема 8. Для любых положительных действительных значений a и b и любых рациональных значений p и q истинны равенства:

- 1) $a^p a^q = a^{p+q}$;
- 2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;
- 3) $(a^p)^q = a^{pq}$;
- 4) $(ab)^p = a^p b^p$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Доказательство. Пусть a и b — положительные рациональные числа, а p и q — произвольные рациональные числа. Представим числа p и q обыкновенными дробями: $p = \frac{k}{l}$; $q = \frac{m}{n}$. После приведения этих дробей к общему знаменателю получим: $p = \frac{kn}{ln}$; $q = \frac{ml}{nl}$. Значит,

$$\begin{aligned} a^p a^q &= a^{\frac{kn}{ln}} \cdot a^{\frac{ml}{nl}} = \sqrt[ln]{a^{kn}} \cdot \sqrt[nl]{a^{ml}} = \sqrt[ln]{a^{kn} \cdot a^{ml}} = \sqrt[ln]{a^{kn+ml}} = a^{\frac{kn+ml}{ln}} = \\ &= a^{\frac{kn}{ln} + \frac{ml}{ln}} = a^{\frac{k}{l} + \frac{m}{n}} = a^{p+q}. \end{aligned}$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

Мы ввели понятие рациональной степени положительного действительного числа. В тех случаях, когда показатель степени — дробь с нечетным знаменателем, приведенное определение распространяется и на отрицательные числа.

Пример 2. $(-6)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(-6)^4} = \sqrt[3]{6^4} = \sqrt[3]{6^3 \cdot 6} = 6 \sqrt[3]{6}$.

Степень $a^{\frac{m}{n}}$ не определяется в тех случаях, когда $a = 0$, а показатель $\frac{m}{n}$ — число неположительное и если основание a — число отрицательное, а знаменатель n — число четное.

- ?
1. Как определяется степень с натуральным показателем; нулевым показателем; целым отрицательным показателем?
 2. Как определяется степень с положительным основанием и рациональным показателем?
 3. Сформулируйте теорему о значении степени с одним основанием и показателями, представляющими одно рациональное число.
 4. Сформулируйте правило умножения степеней с рациональными показателями.
 5. Сформулируйте правило деления степеней с рациональными показателями.
 6. Сформулируйте правило возведения рациональной степени в рациональную степень.
 7. Сформулируйте правило возведения произведения в рациональную степень.
 8. Сформулируйте правило возведения дроби в рациональную степень.

519. Запишите степень с дробным показателем арифметический корень:

- а) $\sqrt[3]{11}$;
- б) $\sqrt[4]{203^3}$;
- в) $\sqrt[6]{\frac{1}{31}}$;
- г) $\sqrt[4]{\frac{1}{5^{-3}}}$;
- д) $\sqrt[14]{3+b}$;
- е) $\sqrt[5]{\frac{1}{m^2n}}$.

520. Запишите корнем степень с дробным показателем:

- а) $5^{\frac{4}{5}}$;
- б) $7^{\frac{1}{7}}$;
- в) $3,5^{-\frac{2}{7}}$;
- г) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-\frac{1}{3}}$;
- д) $3l^{\frac{1}{2}}$;
- е) $\frac{1}{4}k^{\frac{1}{4}}$;
- ж) $cd^{\frac{3}{5}}$;
- з) $-(cd)^{\frac{3}{5}}$.

521. Квадратным корнем из числа запишите выражение:

- а) $376^{\frac{1}{2}}$;
- б) $0,77^{0,5}$;
- в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$;
- г) $5^{\frac{3}{4}}$;
- д) $3,218^{-\frac{3}{8}}$;
- е) $4,05^{\frac{1}{3}}$.

522. Кубическим корнем из числа запишите выражение:

- а) $572^{\frac{1}{3}}$;
- б) $\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{4}{3}}$;
- в) $5^{\frac{2}{6}}$;
- г) $7^{\frac{12}{18}}$.

523. Вычислите:

- а) $100^{\frac{1}{2}}$;
- б) $2,89^{-\frac{1}{2}}$;
- в) $0^{\frac{7}{13}}$;
- г) $27^{\frac{1}{3}}$;
- д) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;
- е) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

524. Вычислите:

а) $64^{\frac{2}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$; в) $125^{\frac{5}{6}} : 5$; г) $32^{0,3}$.

525. Установите, имеет ли значение выражение, и если имеет, то найдите его:

а) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $27^{\frac{1}{3}}$; д) $16^{\frac{1}{4}}$; ж) $(-16)^{\frac{3}{4}}$;
 б) $(-27)^{\frac{1}{3}}$; г) $-16^{-\frac{1}{4}}$; е) $16^{-\frac{3}{4}}$; з) $16^{-\frac{3}{2}}$.

526. Вычислите, если можно, значение выражения:

а) $\sqrt[10]{16^2}$; в) $\sqrt[3]{(-4)^6}$; д) $\sqrt[4]{-16}$;
 б) $\sqrt[6]{(-8)^2}$; г) $\sqrt[5]{-32}$; е) $\sqrt[10]{1024}$.

527. Найдите область определения выражения:

а) $x^{\frac{1}{2}}$; в) $(a-3)^{-\frac{1}{5}}$;
 б) $(z+5)^{\frac{3}{5}}$; г) $(7b(b-1))^{\frac{6}{5}}$.

528. Степенью с рациональным показателем запишите выражение:

а) $\sqrt{x^3}$; б) $\sqrt[4]{z^3}$; в) $\sqrt[6]{a}$; г) $\sqrt[8]{c^{-3}}$.

529. Вычислите:

а) $81^{\frac{1}{2}}$; в) $256^{-0,75}$; д) $9^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}$;
 б) $8^{\frac{2}{3}}$; г) $2^{\frac{11}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}}$; е) $(41^{-3})^{-\frac{2}{3}}$.

530. Вычислите:

а) $25^{\frac{2}{5}} \cdot 125^{\frac{2}{5}}$; в) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$;
 б) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$; г) $6^{\frac{2}{3}} \cdot 36^{\frac{2}{3}}$.

531. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$ при $a = 0,04$; в) $\frac{\sqrt{z^3} \cdot \sqrt[3]{z^2}}{\sqrt[6]{z}}$ при $z = 1,4$;
 б) $\sqrt{y} \cdot \sqrt[6]{y}$ при $y = 8$; г) $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[4]{t} \cdot \sqrt[12]{t^5}$ при $t = 2,5$.

532. Вычислите:

а) $7^{-0,25} \cdot 7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{-0,75} \cdot 7^{\frac{4}{5}}$; в) $25^{0,9} \cdot 5^{-0,8}$; д) $4^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{4}{3}}$;
 б) $(625 \cdot 81)^{\frac{1}{4}}$; г) $\left(0,04 \cdot \frac{1}{121}\right)^{-\frac{1}{2}}$; е) $\left(\frac{8^3}{27^6}\right)^{\frac{1}{3}}$.

533. Степенью с рациональным показателем представьте выражение:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; г) $\sqrt[3]{z} : \sqrt[6]{z}$; ж) $g^{0,2} \cdot g^{-5} \cdot g^{7,8}$;
 б) $c^{\frac{1}{3}} \cdot c^{-\frac{1}{2}}$; д) $e^{0,3} \cdot e^{-1} \cdot e^{0,5}$; з) $(k^{2,5})^{-0,8}$;
 в) $x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{x}$; е) $a^{1,9} \cdot a^{2,6} \cdot \sqrt{a^7}$.

534. Вычислите:

а) $3^{2-4\sqrt[3]{7}} \cdot 81^{\frac{3}{\sqrt[3]{7}}}$; в) $15^{1+2\sqrt{3}} : \left(9^{\sqrt{3}} \cdot 25^{\sqrt{3}}\right)$;
 б) $5^{2+2\sqrt[3]{5}} : 25^{\frac{3}{\sqrt[3]{5}}}$; г) $\left(11^{2-\sqrt{5}}\right)^{2+\sqrt{5}}$.

535. Степенями, показателями которых являются дроби с одинаковыми знаменателями, запишите выражение:

а) $3^{\frac{1}{3}}$ и $5^{\frac{1}{2}}$; в) $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{1}{4}}$;
 б) $5^{\frac{5}{6}}$ и $6^{\frac{1}{9}}$; г) $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{1}{4}}$; $4^{\frac{1}{6}}$, 5.

536. Упростите выражение:

а) $\left(a^{\frac{2}{7}}\right)^{1,4} \cdot a^{-\frac{2}{5}}$; в) $\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(b^{-\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;
 б) $\left(x^{-\frac{7}{12}}\right)^{0,6} \cdot x^{0,25}$; г) $\left(y^{\frac{9}{17}}\right)^{1,7} : \left(y^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2}$.

537. Упростите выражение:

а) $(216x^6)^{\frac{2}{3}}$; в) $(y^{-3})^{-\frac{1}{3}}$; д) $(27b^{-6})^{-\frac{2}{3}}$;
 б) $(64a^3)^{\frac{1}{3}}$; г) $(c^{-9})^{-\frac{1}{3}}$; е) $(-8c^{-9})^{-\frac{1}{3}}$.

538. Представьте квадратом выражение:

а) u^8 ; б) a^{25} ; в) w^7 ; г) d ; д) y^{-1} ; е) $e^{-0,9}$.

539. Представьте кубом выражение:

а) y^6 ; б) r^7 ; в) $a^{\frac{1}{3}}$; г) $c^{-\frac{2}{3}}$; д) $g^{-\frac{5}{12}}$.

540. Сократите дробь:

а) $\frac{s-t}{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}}$; б) $\frac{k^{\frac{1}{2}} + l^{\frac{1}{2}}}{k+2\sqrt{kl}+l}$;
 в) $\frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{m^4}}$; г) $\frac{g-2g^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{g}-1}$.

541. Степенью с дробным показателем через объем V куба выразите:

а) длину a его ребра; б) площадь S его грани;
 в) его полную поверхность P .

542. Учитывая, что a и b — положительные действительные числа, выразите переменную a через переменную b , если:

а) $b = a^{\frac{2}{3}}$; б) $b = a^{-\frac{5}{3}}$; в) $b = 7a^{-\frac{3}{5}}$;
 г) $b = a^{\frac{5}{7}}$; д) $b = a^{-0,75}$; е) $b = \frac{1}{6} a^{-\frac{4}{3}}$.

543. Проверьте, истинно ли при положительных значениях переменной равенство:

а) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}} = 1$; б) $\frac{\sqrt[4]{y^6 \sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[6]{y^{12} \sqrt{y}}} = 1$.

544. Степенью с дробным показателем представьте выражение:

а) $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[9]{x}$; б) $\sqrt[6]{z^3 \sqrt[3]{z^2}}$;
 в) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[7]{a^{-1}}$; г) $\sqrt[10]{p^{11} \sqrt[3]{p^3}}$.

545. Упростите выражение:

а) $(x^4)^{-\frac{3}{4}} \cdot (y^{-\frac{2}{3}})^{-6}$; б) $(\sqrt{p^{0,4} q^{1,2}})^{10}$;
 в) $\left(\frac{9}{a^2}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{3}{27}\right)^{\frac{1}{9}}$; г) $r^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{r^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$.

546. Упростите выражение:

а) $\frac{x^{\frac{4}{3}} \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)}$; б) $\frac{\frac{1}{z^{\frac{5}{3}}} \left(\sqrt[5]{z^4} - \sqrt[5]{z^{-1}}\right)}{z^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{z^{-2}}\right)}$;
 в) $\frac{s^{\frac{5}{3}} t^{-1} - s t^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{s^2} - \sqrt[3]{t^2}}$; г) $\frac{u^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{v} + v^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{u}}{6\sqrt[6]{u} + 6\sqrt[6]{v}}$.

547. Найдите множество, на котором истинно равенство:

а) $\left(s^{\frac{1}{3}}\right)^3 = s$; б) $\left(t^{-\frac{1}{7}}\right)^7 = t^{-2}$;
 в) $u^{\frac{4}{11}} \cdot u^{-\frac{15}{11}} = u^{-1}$; г) $(v^2)^{\frac{1}{4}} = (-v)^{\frac{1}{2}}$;
 д) $(a^6)^{\frac{1}{6}} = -a$; е) $(b^2)^{\frac{1}{6}} = (-b)^{\frac{1}{3}}$.

548. Решите уравнение:

а) $x^{\frac{1}{2}} = 7$; б) $y^{\frac{2}{3}} = 9$;
 в) $z^{1,5} = 125$; г) $t^{-0,8} = 81$;
 д) $a^{0,2} \cdot a^{1,8} = 1$;
 е) $b^{\frac{4}{9}} \cdot b^{\frac{5}{9}} = -25$.

549. Учитывая, что $5,47^{\frac{1}{2}} = \alpha$, найдите:

а) $547^{\frac{1}{2}}$; б) $54\,700^{\frac{1}{2}}$;
 в) $0,0547^{\frac{1}{2}}$; г) $0,000\,547^{\frac{1}{2}}$.

550. Учитывая, что $7^{\frac{1}{3}} \approx 1,91$, найдите:

а) $7^{\frac{2}{3}}$; б) $7^{\frac{5}{3}}$; в) $7^{-\frac{4}{3}}$;
 г) $7^{\frac{4}{3}}$; д) $7^{-\frac{1}{3}}$; е) $7^{-\frac{5}{3}}$.

551. Оцените значения выражений $t^{\frac{1}{2}}$, $t^{\frac{1}{3}}$; $t^{\frac{1}{4}}$, $t^{\frac{1}{6}}$ и сравните их между собой, учитывая, что:

- а) $0 \leq t \leq 1$; г) $729 \leq t \leq 4\,096$;
 б) $1 \leq t \leq 64$; д) $729 \leq t \leq 15\,625$;
 в) $64 \leq t \leq 729$; е) $46\,656 \leq t \leq 1\,000\,000$.

552. Запишите формулу, выражающую зависимость, график которой изображен на рисунке:

- а) 222; б) 223; в) 224; г) 225.

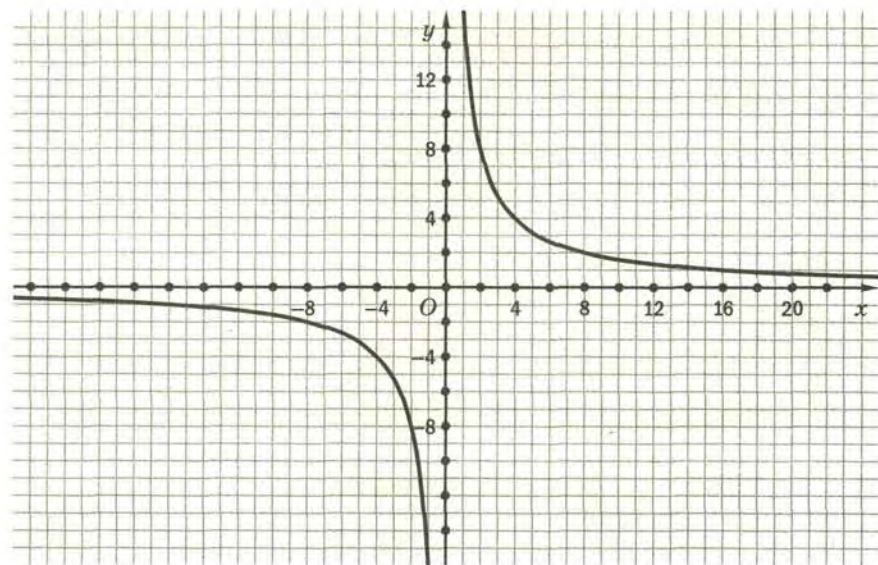


Рис. 222

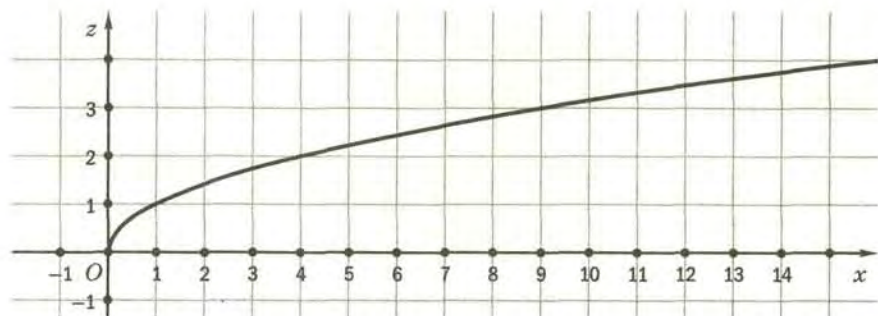


Рис. 223

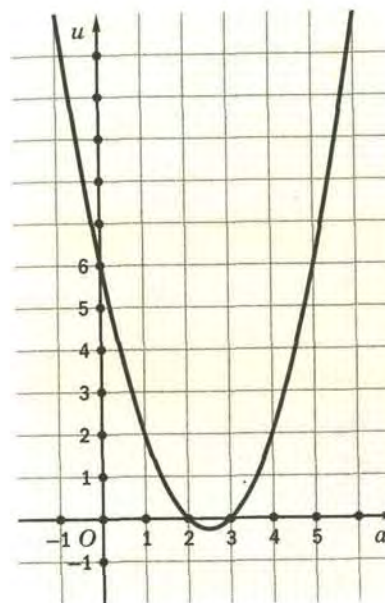


Рис. 224

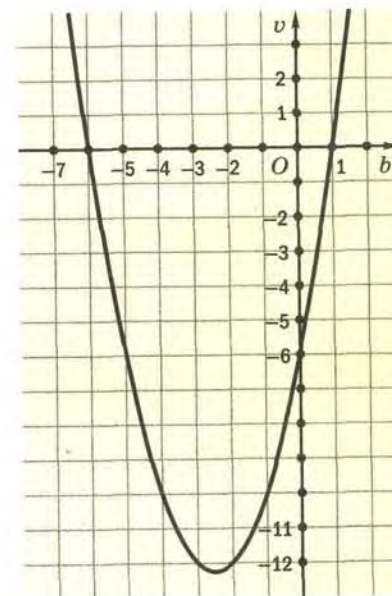


Рис. 225

553. Решите неравенство:

- а) $6k^2 - k - 2 \geq 0$; г) $e^2 - 3e + 2 \leq 0$;
 б) $\frac{1}{3}s^2 + 3s + 6 < 0$; д) $r^2 - 3r + 4 \geq 0$;
 в) $2(t+2)^2 - 3,5 \geq 2t$; е) $-f^2 + 3f - 2 < 0$.

554. Решите неравенство:

- а) $\frac{r^2+1}{r^2+3r-10} < 0$; г) $\frac{v+1}{v-1} + 2 > \frac{v-1}{v}$;
 б) $\frac{10-s}{5+s} > \frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{w+1} + \frac{2}{w+3} < \frac{3}{w+2}$;
 в) $\frac{t^2-5t+6}{t^2+5t+6} < 0$; е) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} < 0$.

555. Велосипедист должен проехать 17 км по шоссе и затем 20 км по грунтовой дороге. Какой может быть скорость велосипедиста по грунтовой дороге, если она на 1 км/ч меньше скорости по шоссе, а время движения не должно превышать 2 ч 15 мин?



Рис. 226

556. Берлин, Гамбург, Мюнхен, Кёльн — самые крупные города Германии (рис. 226). На рисунке 227 изображены отношения между количеством их жителей. По этим сведениям составьте задачу и решите ее.

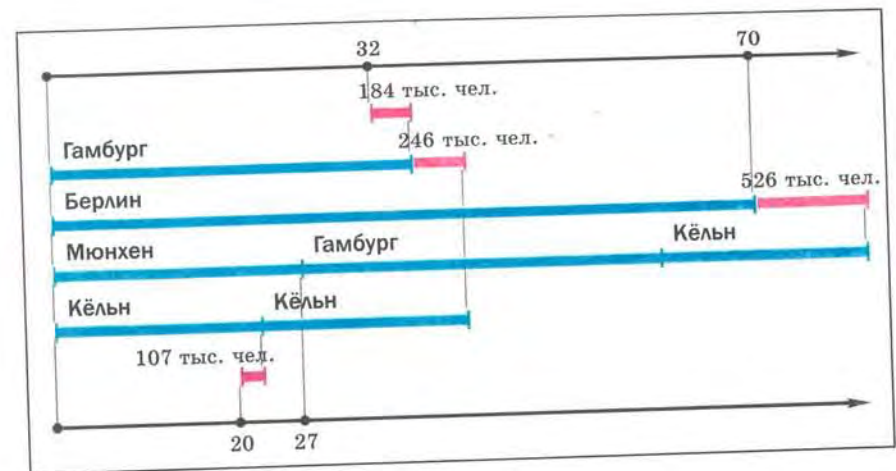


Рис. 227

* * *

557. Сумма положительных чисел x и y не превышает 2.

Докажите, что истинно неравенство $\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} \geq xy$.

558. Для острых углов α , β и γ истинны равенства $\sin \alpha = \cos \beta$, $\sin \beta = \cos \gamma$ и $\sin \gamma = \cos \alpha$. Докажите, что $\alpha = \beta = \gamma = 45^\circ$.

559. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов ABD и ACD пересекаются на стороне AD . Докажите, что биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на стороне BC .

14. Иррациональные выражения

Введение действия извлечения корня порождает новый класс выражений.

Выражение с переменными называется **иррациональным**, если оно содержит хотя бы одно действие извлечения корня из выражения с переменными.

Например, выражения $\sqrt{x}$, $\frac{u}{\sqrt[5]{v^4 + 3uv}}$; $4 + z - z^{\frac{1}{2}}$ являются

иррациональными, а выражение $c - \sqrt[6]{7}$ иррациональным не является, так как оно не содержит действия извлечения корня из выражения с переменной.

Извлечение корня из произведения

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Извлечение корня из дроби

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

Возведение корня в степень

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Извлечение корня из корня

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Основное свойство корня

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то свойства справедливы при любых натуральных m, n, k .
Если m, n, k — нечетные натуральные числа, то свойства справедливы при любых действительных a и b .

Рис. 228

Рациональные и иррациональные выражения вместе составляют множество **алгебраических выражений**.

При преобразованиях иррациональных выражений используются свойства действий над корнями, которые называют еще **радикалами** (рис. 228).

Используются также свойства степеней с рациональными показателями (рис. 229).

Пример 1. Упростим выражение

$$\left(\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a^2}.$$

Найдем сначала область определения данного выражения, учитывая то, что в первом слагаемом a является подкоренным выражением корня четной степени и то, что во втором слагаемом выполняется деление на выражение $\sqrt[3]{a^2}$. Поэтому должна быть истинна система условий $\begin{cases} a \geq 0, \\ a \neq 0, \end{cases}$ которая равносильна неравенству $a > 0$. С учетом этого получим:

Умножение корней с одинаковыми показателями

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Деление корней с одинаковыми показателями

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

Представление корня степенью

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Представление корня корнем из корня

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}$$

Монотонность действий извлечения корня и возведения в степень

$$\text{Если } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

$$\text{Если } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, \text{ то } a > b$$

Умножение степеней с одинаковыми основаниями

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

Деление степеней с одинаковыми основаниями

$$a^p : a^q = a^{p-q}$$

Возведение степени в степень

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Возведение в степень произведения

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Возведение в степень дроби

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad (b \neq 0)$$

Представление степени произведением степеней

$$a^{p+q} = a^p a^q$$

Представление степени частным степеней

$$a^{p-q} = a^p : a^q$$

Представление степени степенью степени

$$a^{pq} = (a^p)^q$$

Умножение степеней с одинаковыми показателями

$$a^p b^p = (ab)^p$$

Деление степеней с одинаковыми показателями

$$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p \quad (b \neq 0)$$

Если $a > 0$ и $b > 0$, то свойства справедливы при любых рациональных p и q .

Рис. 229

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a^2} = \\ & = \left(\frac{\sqrt[6]{a} - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} : \sqrt[3]{a^2} = \\ & = \left(\frac{\sqrt[6]{a} - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} : \sqrt[3]{a^2} = \frac{(\sqrt[6]{a})^2 - 2\sqrt[6]{a} \cdot 4 + 4^2}{(2\sqrt{2})^2} + \sqrt[6]{a^5} : \sqrt[3]{a^2} = \\ & = \frac{\sqrt[6]{a^2} - 8\sqrt[6]{a} + 16}{8} + \sqrt[6]{a^5} : \sqrt[3]{a^2} = \frac{1}{8} \sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a} + 2 + \sqrt[6]{a^5 : a^4} = \\ & = \frac{1}{8} \sqrt[3]{a} - \sqrt[6]{a} + 2 + \sqrt[6]{a} = \frac{1}{8} \sqrt[3]{a} + 2. \end{aligned}$$

Результирующее выражение $\frac{1}{8} \sqrt[3]{a} + 2$ тождественно равно

данному выражению $\left(\frac{\sqrt[6]{a}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{a^2}$ на множестве положительных действительных чисел.

Пример 2. Упростим выражение

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x}\right).$$

Чтобы найти область определения, обратим внимание на то, что подкоренные выражения $1+x$ и $1-x$ должны иметь

неотрицательные значения, а это означает, что значения переменной x должны принадлежать промежутку $[-1; 1]$. Из этого множества условие $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \neq 0$ исключает число 0, а условие $\sqrt{1-x^2} + x - 1 \neq 0$ — еще и число 1. Условие $\frac{1}{x^2} - 1 \geq 0$ дополнительных исключений не требует. Таким образом, областью определения выражения является множество $[-1; 0) \cup (0; 1)$. На нем истинно равенство $1-x = (\sqrt{1-x})^2$. Поэтому:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} = \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)}-(\sqrt{1-x})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} - (\sqrt{1-x})^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \\ &= \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \\ &= \frac{1+x+1-x+2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{1-x})^2} = \frac{2+2\sqrt{1-x^2}}{1+x-1+x} = \frac{2(1+\sqrt{1-x^2})}{2x} = \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}; \\ & \sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Чтобы продолжить преобразования, нужно раскрыть выражение $|x|$. Пусть $-1 \leq x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{(\sqrt{1-x^2}+1)^2}{x^2} = \\ &= -\frac{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}+1}{x^2} = \frac{2+2\sqrt{1-x^2}-x^2}{x^2} = \frac{2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} - 1. \end{aligned}$$

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $|x| = x$ и

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^2-1^2}{x^2} = \\ &= \frac{1-x^2-1}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

О т в е т. $\begin{cases} \frac{2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} - 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ -1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$

Пример 3. Найдём значение выражения $\left(\frac{u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6}$

при $u = 1,11$ и $v = 0,37$.

Сначала упростим данное выражение, т. е. заменим его тождественно равным выражением с меньшим количеством действий:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6} = \left(\left(\frac{u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}} \right)^{-1} \right)^6 = \left(\frac{u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}}{u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{3}}} \right)^6 = \\ &= \left(\frac{u^{\frac{1}{6}} (u^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{6}})}{v^{\frac{1}{6}} (u^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{6}})} \right)^6 = \left(\frac{u^{\frac{1}{6}}}{v^{\frac{1}{6}}} \right)^6 = \left(\frac{u}{v} \right)^{\frac{1}{6} \cdot 6} = \frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку вместо переменных и проведем вычисления:

$$\frac{1,11}{0,37} = 3.$$

О т в е т. Если $u = 1,11$ и $v = 0,37$, то $\left(\frac{u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}} - v^{\frac{1}{3}}}{u^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{6}} v^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6} = 3.$

Пример 4. Сравним значения выражений $\sqrt[3]{7\sqrt{3}}$ и $\sqrt[3]{5\sqrt{5}+1}$, т. е. определим, какой знак $<, =, >$ — нужно поставить в формуле $\sqrt[3]{7\sqrt{3}} \vee \sqrt[3]{5\sqrt{5}+1}$ вместо знака $\vee$, чтобы формула стала истинным высказыванием.

Используем то, что условия $\sqrt[3]{7\sqrt{3}} \vee \sqrt[3]{5\sqrt{5}+1}$ и $(\sqrt[3]{7\sqrt{3}})^3 \vee (\sqrt[3]{5\sqrt{5}+1})^3$ одновременно истинны или одновременно ложны. Поскольку в полученной формуле $7\sqrt{3} \vee 5\sqrt{5}+1$ обе части положительны, то эта формула и формула $(7\sqrt{3})^2 \vee (5\sqrt{5}+1)^2$ истинны или ложны одновременно. Формулы $49 \cdot 3 \vee 25 \cdot 5 + 10\sqrt{5}+1$ и формулы $147 - 126 \vee 10\sqrt{5}$, или $21 \vee 10\sqrt{5}$, или $\sqrt{441} \vee \sqrt{500}$ также истинны или ложны одновременно. С учетом монотонности действия извлечения корня можно утверждать, что $\sqrt{441} < \sqrt{500}$, а поэтому всюду знак $\vee$ нужно заменить знаком $<$.

Ответ. $\sqrt[3]{7\sqrt{3}} < \sqrt[3]{5\sqrt{5}+1}$.

1. Какое выражение называют корнем степени n (радикалом)?
 2. Какое выражение называют иррациональным выражением; алгебраическим выражением?
 3. Запишите формулу, выражающую правило извлечения корня из произведения; правило умножения корней.
 4. Запишите формулу, выражающую правило представления рациональной степени произведением; правило умножения степеней с рациональными показателями.
 5. Запишите формулу, выражающую правило извлечения корня из дроби; правило деления корней.
 6. Запишите формулу, выражающую правило возведения в степень дроби; правило деления степеней с одинаковыми показателями.
 7. Запишите формулу, выражающую правило возведения корня в степень; правило представления корня степенью.
 8. Запишите формулу, выражающую правило возведения рациональной степени в рациональную степень; правило представления рациональной степени степенью.
 9. Запишите формулу, выражающую правило извлечения корня из корня; правило представления корня другим корнем.
 10. Запишите формулу, выражающую правило возведения степени в рациональную степень; правило представления степени другой степенью.
 11. Запишите основное свойство корня.
 12. Запишите утверждение, выражающее монотонность действия извлечения корня.

560. Представьте суммой выражение:

- а) $z^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \cdot (z^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}})$; г) $(1 + c^{\frac{1}{2}})^2$;
 б) $(s^{-\frac{3}{4}} + 2) \cdot (s^{-\frac{1}{4}} - 3)$; д) $(r^{\frac{1}{3}} - p^{\frac{1}{3}})^2$;
 в) $(1 + a^{\frac{1}{2}}) \cdot (1 - a^{\frac{1}{2}})$; е) $((m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}})(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{4}}))^2$.

561. Упростите выражение:

- а) $(\sqrt{a} - \sqrt{36}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{36})$;
 б) $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+y} - \sqrt{x})$;
 в) $\sqrt{m^2 - n^2} : \sqrt{m+n}$;
 г) $(\sqrt{g^3} - \sqrt{h^3}) : (\sqrt{g} + \sqrt{h})$.

562. Упростите выражение:

- а) $(1 + x^{\frac{1}{2}})^2 - 2x^{\frac{1}{2}}$;
 б) $f^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} - (f^{\frac{1}{4}} + e^{\frac{1}{4}})^2$;
 в) $(q^{\frac{1}{4}} + g^{\frac{1}{4}}) \cdot (q^{\frac{1}{4}} - g^{\frac{1}{4}}) \cdot (q^{\frac{1}{2}} + g^{\frac{1}{2}})$;
 г) $(u^{1,5} - v^{1,5})^2 \cdot (u^{1,5} + v^{1,5})^2$.

563. Сократите дробь:

- а) $\frac{3+3^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}$; в) $\frac{h^{\frac{2}{3}} - h^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{3}}}$; д) $\frac{s-t}{s^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}$;
 б) $\frac{i}{i - i^{\frac{1}{2}}}$; г) $\frac{z - z^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}} - 1}$; е) $\frac{i-j}{i^{\frac{2}{3}} + i^{\frac{1}{3}}j^{\frac{1}{3}} + j^{\frac{2}{3}}}$.

564. Учитывая, что значения переменной — неотрицательные числа, разложите на множители выражение:

- а) $5 - a^2$; в) $36 - e^{\frac{4}{7}}$; д) $(p^{\frac{1}{2}})^3 - 27$;
 б) $(c^{\frac{1}{3}})^2 - 9$; г) $m - 3$; е) $t - 3^{\frac{3}{2}}$.

565. Упростите выражение:

- а) $(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$;
 б) $(\sqrt[4]{27b^3} - \sqrt[4]{8d^3}) : (\sqrt[4]{3b} - \sqrt[4]{2d})$;
 в) $(k\sqrt{k} + l\sqrt{l}) : (k\sqrt{l} + l\sqrt{k})$;
 г) $\left(\frac{m}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{m}}\right) : (\sqrt{m} - \sqrt{n})$.

566. Упростите выражение:

- а) $a^4\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} : (b\sqrt{ab})$; г) $\sqrt{i^3\sqrt{\frac{i}{j^2}}\sqrt{\frac{i^2}{j^2}}}$;
 б) $\sqrt[6]{-k^6l^7}$; д) $\sqrt[5]{\frac{m^3n}{k^2l}} : \sqrt[10]{\frac{m^6n^4}{k^4l^3}}$;
 в) $(z^2 + t^2) : (z^3\sqrt{t} + t^3\sqrt{z})$; е) $\sqrt[6]{-p^6q^7x^{13}}$.

567. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- а) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; в) $\frac{2t}{\sqrt{z+t} - \sqrt{z-t}}$;
 б) $\frac{b\sqrt{c} + d\sqrt{e}}{b\sqrt{c} - d\sqrt{e}}$; г) $\frac{2pq}{p+q + \sqrt{p^2 + q^2}}$.

568. Избавьтесь от иррациональности в числителе дроби:

- а) $\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{r-3s}}{r-s}$; в) $\frac{\sqrt[3]{m+3n}}{m+n}$; г) $\frac{\sqrt{\sqrt{a+b}}}{\sqrt{a-b}}$.

569. Сократите дробь:

- а) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y}}$; в) $\frac{e\sqrt{e} + \sqrt[3]{f^2}}{f^2 + e\sqrt[4]{e}}$;
 б) $\frac{\sqrt[4]{m^3+n}}{\sqrt[4]{m} + \sqrt[3]{n}}$; г) $\frac{1 - \sqrt{k}}{\sqrt[6]{k(k+1)} - 2\sqrt[3]{k^2}}$.

570. Упростите выражение:

- а) $\frac{\sqrt[11]{(\sqrt[3]{k^4p^2h})^5 \cdot ((\sqrt{k^3p^2h})^4)^3}}{k^{\frac{5}{11}}}$;
 б) $\left(\frac{u^{\frac{2}{3}}v^{l+3}w^3}{(u-v)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{(u-v)^{\frac{1}{4}}}{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{4}}w^{\frac{1}{4}}}\right)^2$.

571. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{2a^2 - 4ab}{a-b}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}$;
 б) $\frac{3xy - y^2}{x-y} - \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}} - \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{ab} + b^{\frac{2}{3}}}$.

572. Упростите:

- а) $\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{x}{1-\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}$;
 б) $\left(\frac{(m + \sqrt[3]{m^2n}) : (n + \sqrt[3]{mn^2}) - 1}{m-n} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^3$;
 в) $\left(\frac{(\sqrt[4]{u^3} + \sqrt[4]{v^3})(\sqrt[4]{u^3} - \sqrt[4]{v^3})}{\sqrt{u} - \sqrt{v}} - \sqrt{uv}\right) : \frac{u+v}{2}$;
 г) $\left(\frac{\sqrt[4]{kl^3} - \sqrt[4]{k^3l}}{\sqrt{k} - \sqrt{l}} + \frac{1 + \sqrt{kl}}{\sqrt[4]{kl}}\right)^{-2} \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{l}} + 2\sqrt{\frac{k}{l}}$.

573. Упростите выражение:

- а) $\left(a\sqrt{\frac{a^2-a}{a+1}} + 2a\sqrt{\frac{a}{a^2-1}} - \sqrt{\frac{a^2+a}{a-1}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$;
 б) $\left(\sqrt[4]{z^2-2z+1} + \frac{z}{\sqrt{1-z}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{z+1}} - \frac{\sqrt{z+1}}{z-1}\right)$;
 в) $\left((\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q})^{-1} + (\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q})^{-1}\right)^{-2} : \frac{p-q}{4(\sqrt{p} + \sqrt{q})}$;
 г) $\left(\frac{\frac{1}{y} - y}{\left(\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{\frac{1}{y}} + 1\right)\left(\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{\frac{1}{y}} - 1\right)} + \sqrt[3]{y}\right)^{-3}$.

574. Упростите выражение:

- а) $\frac{z\sqrt{z+1} - \frac{2z-1}{\sqrt{z+1}}}{z + \sqrt{z-1}}$; б) $\frac{x+y}{\sqrt{y^2+2xy}} - \frac{\frac{x^2}{(x+y)^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{(x+y)^2}}}$;

$$\text{в)} \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2 + b} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b}} \right) + \frac{b}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{\frac{a}{a^2 + b}}}{a + \sqrt{a^2 + b}};$$

$$\text{г)} \left(\sqrt{1 - c} + \frac{1}{\sqrt{1 + c}} \right) : \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} \right).$$

575. Упростите выражение:

$$\text{а)} \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \text{ при } x = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}};$$

$$\text{б)} \frac{1-ax}{1+ax} \cdot \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} \text{ при } x = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{2a}{b} - 1};$$

$$\text{в)} \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \text{ при } x = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right);$$

$$\text{г)} \frac{x+y-1}{x+y+1} \text{ при } x = \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{ab+1}}, y = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1}.$$

576. Упростите выражение:

$$\text{а)} \frac{m}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + n} + \frac{n}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - m} - \frac{m+n}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}};$$

$$\text{б)} \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2} - 6} - \frac{3}{\frac{1}{b^2} + 6} + \frac{b}{36 - b};$$

$$\text{в)} \left(\frac{1-f^{1,5}}{1-f^{0,5}} + f^{0,5} \right) \cdot \left(\frac{1+f^{1,5}}{1+f^{0,5}} - f^{0,5} \right);$$

$$\text{г)} \frac{2}{\frac{1}{w^2} - \frac{1}{v^2}} - \frac{2w^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{w^2} + \frac{3}{v^2}} \cdot \frac{w - w^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} + v}{\frac{1}{w^2} - \frac{1}{v^2}}.$$

577. Упростите выражение:

$$\text{а)} \frac{a-b}{\sqrt[3]{a-3\sqrt{b}}} - \frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}};$$

$$\text{б)} \frac{\frac{a+b}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a-b}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}{\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} + b^{\frac{2}{3}}};$$

$$\text{в)} \frac{\frac{a+b}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}};$$

$$\text{г)} \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{a+b}}{\frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{b^{\frac{2}{3}}}}.$$

578. Упростите выражение:

$$\text{а)} \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2;$$

$$\text{в)} \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{9}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} - b^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} + b^{\frac{1}{2}}};$$

$$\text{б)} \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right);$$

$$\text{г)} \frac{\sqrt{a} - a^{\frac{1}{2}} b}{1 - \sqrt{a^{-1}b}} - \frac{\sqrt[3]{a^2 - a^{\frac{1}{3}}b}}{\sqrt[6]{a+a^{\frac{1}{3}}b}}.$$

579. Упростите выражение:

$$\text{а)} \frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{7}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{3}{4}}};$$

$$\text{в)} \frac{\frac{5}{b^{\frac{1}{4}}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{b^{\frac{1}{4}}} + b^{\frac{1}{4}}};$$

$$\text{д)} \frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}};$$

$$\text{б)} \frac{\frac{4}{a^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{2}{3}}};$$

$$\text{г)} \frac{\frac{-4}{a^{\frac{1}{3}}b^{-2}} - a^{\frac{-2}{3}}b^{\frac{-4}{3}}}{\frac{5}{a^{\frac{1}{3}}b^{-2}} - b^{\frac{5}{3}}a^{-2}};$$

$$\text{е)} \frac{\frac{3}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} - a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}.$$

580. Учитывая, что $b = p \left(\frac{k^2 + l^2}{2kl} \right)^{\frac{1}{2}}$, $p > 0$ и $k > 0$, упростите

$$\text{выражение } \frac{(b^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} + (b^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} - (b^2 - p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

581. Учитывая, что $h = 4(d-1)$, найдите значение выра-

$$\text{жения } \left(d + h^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(d - h^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ при:}$$

$$\text{а)} 1 < d < 2; \quad \text{б)} d > 2.$$

582. Учитывая, что $j = \sqrt{ef}$, найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{(e+j)(j+f)} + \sqrt{(e-j)(j-f)}}{\sqrt{(e+j)(j+f)} - \sqrt{(e-j)(j-f)}} \text{ при:}$$

$$\text{а)} e > f > 0; \quad \text{б)} f > e > 0.$$

583. Упростите выражение:

$$\text{а)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} - \left(\frac{x + \sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}} - \sqrt[4]{xy} \right) \cdot \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}};$$

$$\text{б)} \left(\frac{(\sqrt[4]{p^3} - \sqrt[4]{q^3})(\sqrt[4]{p^3} + \sqrt[4]{q^3})}{\sqrt{p} - \sqrt{q}} - \sqrt{pq} \right) \cdot \frac{2\sqrt{2,5}}{10^{\frac{1}{2}}(p+q)}.$$

584. Решите уравнение:

а) $\frac{\sqrt[3]{s-1}}{\sqrt[3]{s^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{s^2-1}}{\sqrt[3]{s+1}} = 4;$

б) $\left(\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot \frac{1+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x}} = 2 - \frac{\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x}}.$

585. С точностью до тысячной найдите на калькуляторе значение выражения:

а) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[5]{5};$ в) $\sqrt[4]{7 + \sqrt[5]{14}};$ д) $17^{\sqrt{19}};$

б) $(\sqrt[5]{5})^{\sqrt[3]{3}};$ г) $\sqrt[3]{(4,7)^3 + (5,6)^3};$ е) $\pi^\pi.$

586. Сравните числа:

а) $3^{\frac{1}{3}}$ и $4^{\frac{1}{3}};$ д) $(0,88)^{\frac{1}{7}}$ и $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{7}};$

б) $5^{\frac{4}{3}}$ и $7^{\frac{4}{3}};$ е) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$ и $(0,41)^{-\frac{1}{5}};$

в) $5^{\frac{4}{5}}$ и $3^{\frac{4}{5}};$ ж) $(4,09)^{0,35}$ и $\left(4\frac{3}{25}\right)^{0,35};$

г) $21^{\frac{7}{9}}$ и $31^{\frac{7}{9}};$ з) $\left(\frac{12}{13}\right)^{-0,49}$ и $\left(\frac{13}{14}\right)^{-0,49}.$

587. Сравните числа:

а) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2}$ и $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2};$

б) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{5}\right)^3}$ и $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6} - 1\frac{1}{7}\right)^3}.$

588. Решите неравенство:

а) $-2m^2 + m + 1 \geq 0;$ в) $4p^2 - 4p + 1 \geq 0;$
б) $-4n^2 + 3n + 1 \leq 0;$ г) $4q^2 - 20q + 25 < 0.$

589. Решите неравенство:

а) $z + \frac{2}{z} > 3;$ в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 4;$

б) $\frac{7y-5}{y+1} > y;$ г) $\frac{5t-2}{4t+2} > t-1.$

590. Найдите значение выражения:

а) $\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \sin 135^\circ : \operatorname{ctg} 135^\circ;$

б) $\cos 45^\circ : \operatorname{tg} 30^\circ - \sin 180^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ;$

в) $\left(\frac{\operatorname{tg} 45^\circ}{\sin 135^\circ}\right)^4 : \left(\frac{\operatorname{ctg} 30^\circ}{\cos 120^\circ}\right)^{-6};$

г) $\left(\frac{\cos 180^\circ}{\sin 60^\circ}\right)^{1\frac{1}{3}} : \left(\frac{\operatorname{ctg} 120^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}\right)^{-1\frac{1}{3}}.$

591. Докажите тождество:

а) $(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi) = \sin^2 \varphi;$ г) $\frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} = \operatorname{ctg}^2 \beta;$

б) $2 - \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma = 1;$ д) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + \sin^2 \delta = 1;$

в) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha;$ е) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varepsilon} + \cos^2 \varepsilon = 1.$

592. Радиус окружности, вписанной в треугольник с площадью 504 дм², на 3 дм больше радиуса окружности, вписанной в треугольник с площадью 324 дм. Найдите периметры треугольников, учитывая, что периметр первого из них на 12 дм больше.

593. Мастер отремонтировал 24 пары обуви, а его помощник — 6 пар, причем мастер работал на 3 ч больше. Найдите производительность труда мастера и помощника, учитывая, что производительность труда мастера больше на 2 пары обуви в час.

594. Из Борисова и Березино (рис. 230) навстречу друг другу выехали велосипедисты, причем борисовский велосипедист выехал на полчаса раньше и ехал со скоростью на 3,5 км/ч меньшей. Найдите скорости велосипедистов, учитывая, что они встретились около Черневичей.



Рис. 230

595. Найдите остаток от деления некоторого числа на 18, учитывая, что при делении его на 3, 6, 9 получаются остатки, которые в сумме дают 15.

596. Угол против основания BC равнобедренного треугольника ABC равен 30° . На его сторонах AB и AC отмечены точки N и M так, что $\angle CMN = 45^\circ$ и $MN = BC$. Докажите, что $BC = CN$.

597. Докажите, что треугольник, стороны a, b и c которого удовлетворяют неравенству $a + b - \frac{ab}{a+b} < c$, является тупоугольным.

15*. Степенная функция с рациональным показателем

Вы уже знаете ряд функций вида $y = x^p$, где p — рациональное число. Это — прямая пропорциональность $y = x$ (рис. 231), здесь $p = 1$; обратная пропорциональность $y = \frac{1}{x}$, или $y = x^{-1}$, (рис. 232), здесь $p = -1$; квадратная функция $y = x^2$ (рис. 233), здесь $p = 2$; кубическая функция $y = x^3$ (рис. 234), здесь $p = 3$; функция $y = \sqrt{x}$, или $y = x^{\frac{1}{2}}$ (рис. 235), здесь $p = \frac{1}{2}$.

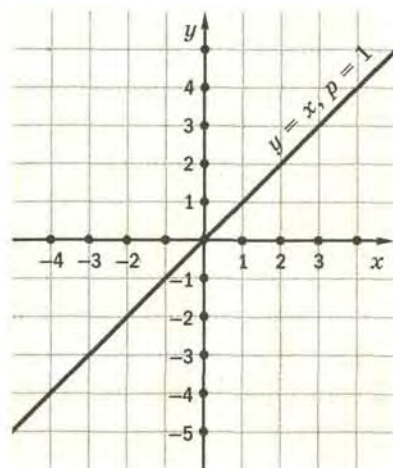


Рис. 231

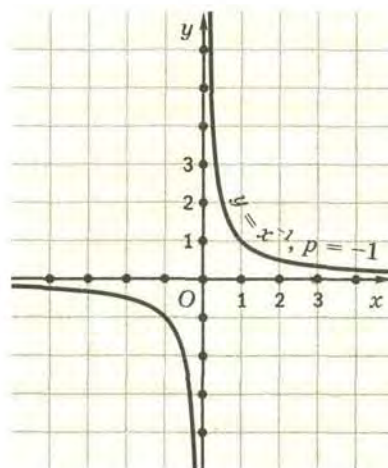


Рис. 232

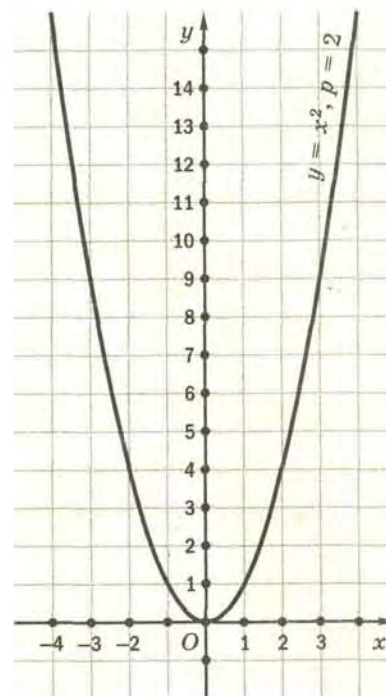


Рис. 233

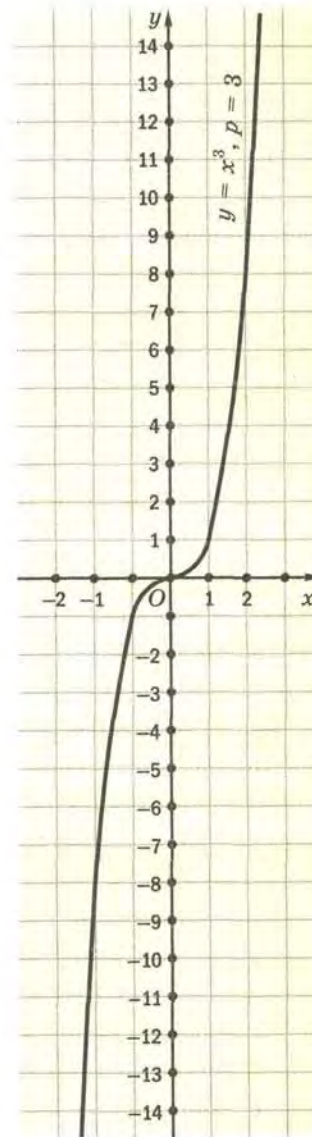


Рис. 234

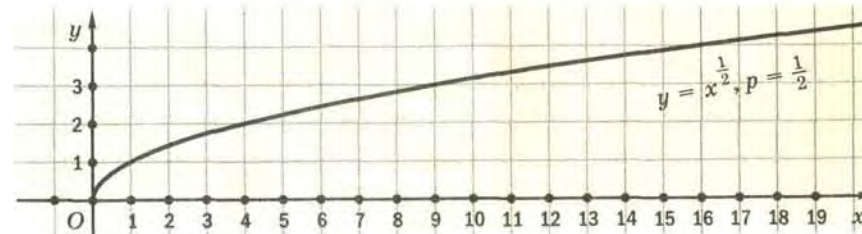


Рис. 235

Функция, которая задается формулой

$$y = x^p,$$

где x — аргумент, p — некоторое число, называется **степенной функцией**.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с целым показателем n . Она определена для тех значений аргумента x , для которых выражение x^p

имеет значение. Так, областью определения функций $y = x^n$ с натуральным показателем является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, областью определения функции $y = x^{-n}$ с целым отрицательным показателем — множество действительных чисел, отличных от нуля.

Сравним между собой графики степенных функций $y = x^2$ и $y = x^3$ при неотрицательных значениях аргумента. Рисунок 236 показывает, что если $x = 0$ и $x = 1$, то значения этих функций совпадают, если $0 < x < 1$, то $x^3 < x^2$, а если $x > 1$, то $x^3 > x^2$.

Теорема 9. Если $n_1 > n_2 \geq 1$, то

$$\begin{cases} x^{n_1} < x^{n_2} \text{ при } 0 < x < 1, \\ x^{n_1} > x^{n_2} \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n_1 > n_2 \geq 1$. Рассмотрим разность $x^{n_1} - x^{n_2}$:

$$x^{n_1} - x^{n_2} = x^{n_2}(x^{n_1-n_2} - 1).$$

Поскольку $n_1 > n_2$, то $n_1 - n_2 > 0$.

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $x^{n_1-n_2} < 1$. Значит, $x^{n_1-n_2} - 1 < 0$.

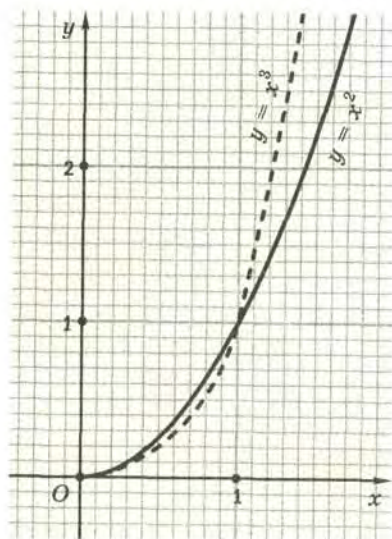


Рис. 236

Учитывая, что $x^{n_2} > 0$, получим, что $x^{n_2}(x^{n_1-n_2} - 1) < 0$. А поэтому $x^{n_1} < x^{n_2}$.

Пусть $x > 1$. Тогда $x^{n_1-n_2} > 1$. Значит, $x^{n_1-n_2} - 1 > 0$. Учитывая, что $x^{n_2} > 0$, получим, что $x^{n_2}(x^{n_1-n_2} - 1) > 0$. А поэтому $x^{n_1} > x^{n_2}$.

Любая степенная функция $y = x^n$ с натуральным показателем n в первой координатной четверти имеет вид, по-

хожий на график функции $y = x^2$, причем в соответствии с теоремой 9 с увеличением показателя n график функции $y = x^n$ на промежутке $(0; 1)$ располагается более близко к оси абсцисс, а на промежутке $(1; +\infty)$ — более далеко. На рисунке 237 изображены графики функций $y = x^5$ и $y = x^{10}$ при неотрицательных значениях аргумента.

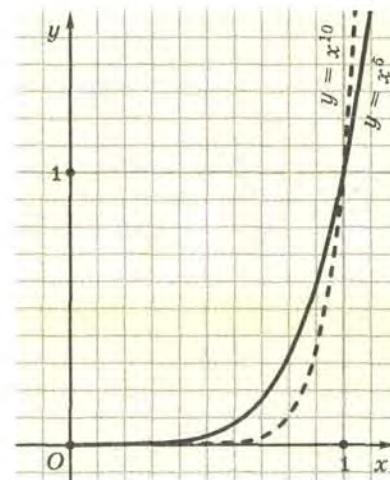


Рис. 237

Функция $y = x^5$ — нечетная, поэтому ее график симметричен относительно начала координат, а функция $y = x^{10}$ — четная, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. Это означает, что на всей области определения график функции $y = x^5$ такой, как показано на рисунке 238, а график функции $y = x^{10}$ такой, как показано на рисунке 239. Вообще, график степенной функции $y = x^n$ при нечетном значении показателя n похож на график, изображенный на ри-

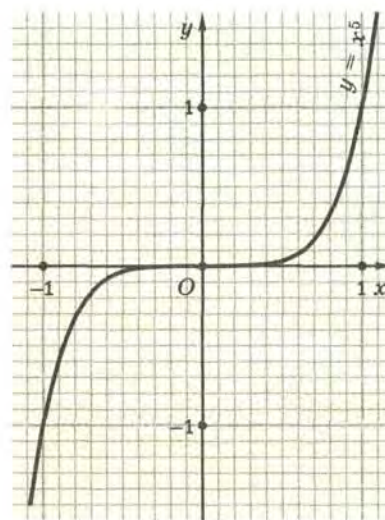


Рис. 238

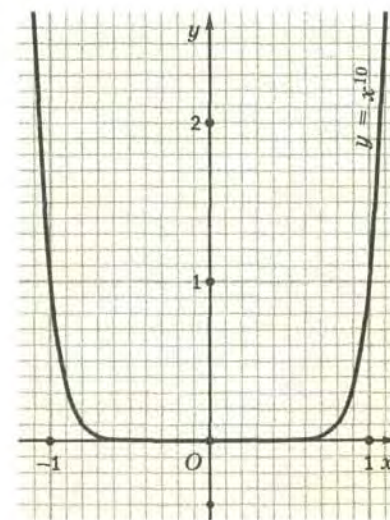


Рис. 239

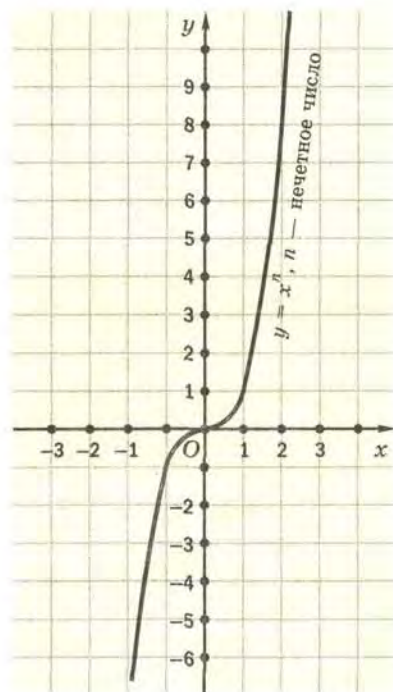


Рис. 240

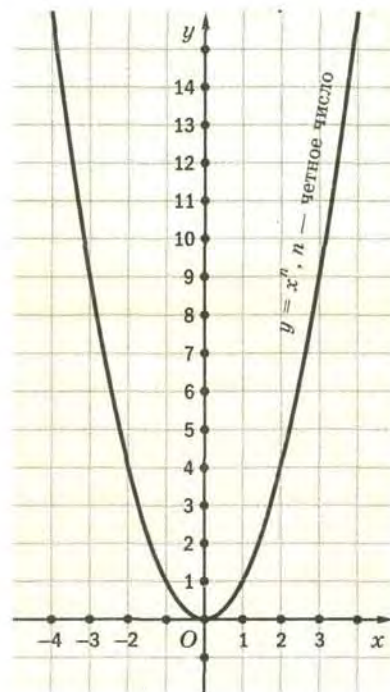


Рис. 241

сунке 240, а при четном — на график, представленный на рисунке 241.

Областью значений степенной функции с нечетным натуральным показателем является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а областью значений степенной функции с четным натуральным показателем — множество неотрицательных действительных чисел.

Построим по точкам графики степенных функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-3}$ при положительных значениях аргумента и сравним их между собой. Рисунок 242 показывает, что если $0 < x < 1$, то $x^{-2} < x^{-3}$, если $x > 1$, то $x^{-2} > x^{-3}$.

Теорема 10. Если $n_1 < n_2 \leq -1$, то $\begin{cases} x^{n_1} > x^{n_2} & \text{при } 0 < x < 1, \\ x^{n_1} < x^{n_2} & \text{при } x > 1. \end{cases}$

Доказательство. Пусть $n_1 < n_2 \leq -1$. Тогда натуральные числа m_1 и m_2 , противоположные числам n_1 и n_2 , связаны неравенством $m_1 > m_2 \geq 1$.

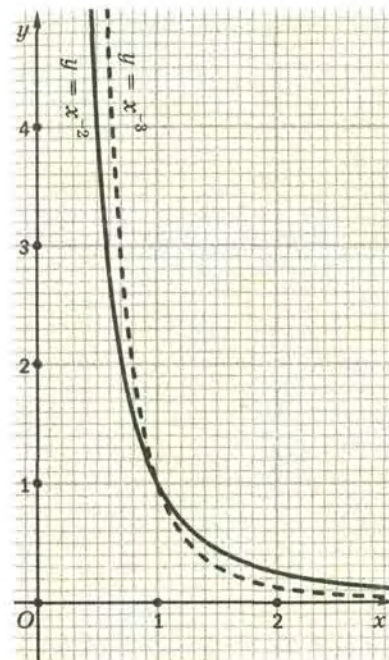


Рис. 242

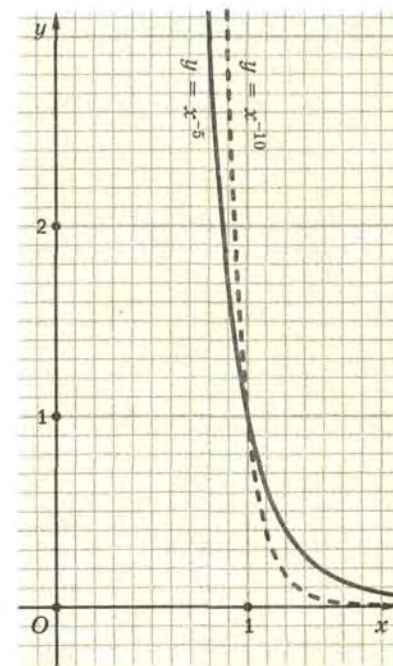


Рис. 243

Пусть $0 < x < 1$. Тогда по теореме 9 имеем, что $x^{m_1} < x^{m_2}$. Учитывая, что $x^{m_1} > 0$, по свойствам числовых неравенств получаем: $\frac{1}{x^{m_1}} > \frac{1}{x^{m_2}}$, или $x^{-m_1} > x^{-m_2}$, или $x^{n_1} > x^{n_2}$.

Пусть $x > 1$. Тогда по теореме 9 имеем, что $x^{m_1} > x^{m_2}$. Учитывая, что $x^{m_2} > 0$, по свойствам числовых неравенств получаем: $\frac{1}{x^{m_1}} < \frac{1}{x^{m_2}}$, или $x^{-m_1} < x^{-m_2}$, или $x^{n_1} < x^{n_2}$.

Любая степенная функция $y = x^n$ с целым отрицательным показателем n в первой координатной четверти имеет вид, похожий на график функции $y = x^{-2}$, причем в соответствии с теоремой 10 на промежутке $(0; 1)$ располагается более далеко от оси абсцисс, а на промежутке $(1; +\infty)$ — более близко. На рисунке 243 изображены графики функций $y = x^{-5}$ и $y = x^{-10}$ при положительных значениях аргумента.

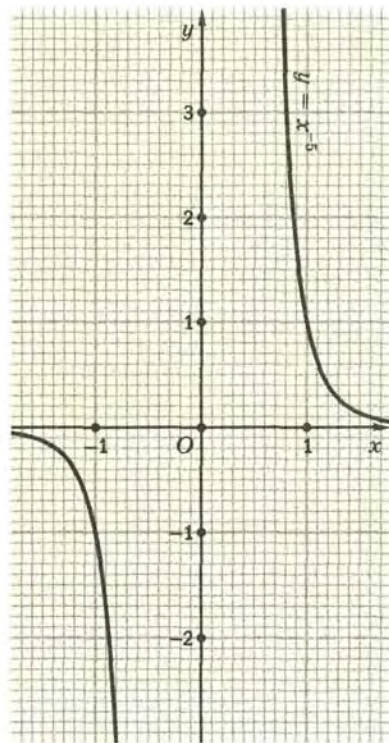


Рис. 244

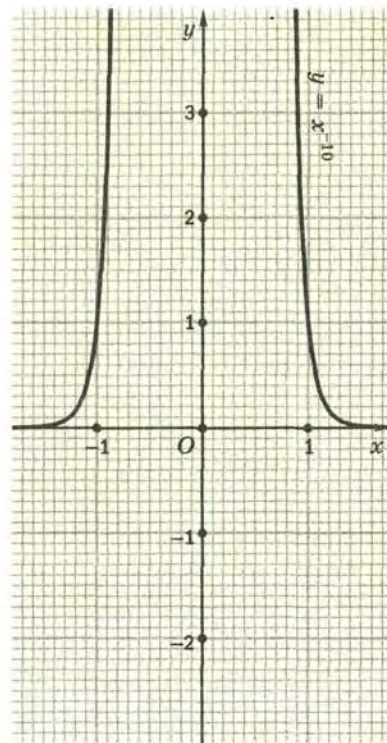


Рис. 245

Графики этих функций в области определения получаются с учетом четности или нечетности функций. На рисунке 244 изображен график функции $y = x^{-5}$, а на рисунке 245 — график функции $y = x^{-10}$ на всей области определения. Вообще, график степенной функции $y = x^n$ при нечетном отрицательном значении показателя n похож на график, изображенный на рисунке 246, а при четном — на график, представленный на рисунке 247.

Рассмотрим теперь на множестве неотрицательных чисел степенную функцию, показателем которой является доля, т. е. функцию вида $y = x^{\frac{1}{n}}$, или $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число, большее единицы.

Построим по точкам график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Получим рисунок 248. Полученный график напоминает известный нам

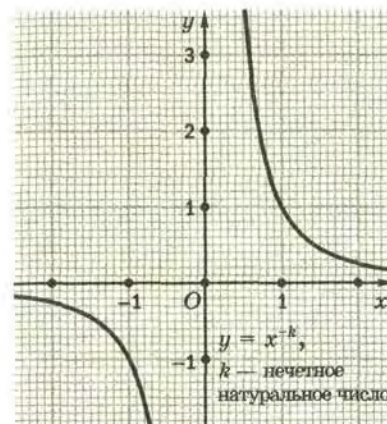


Рис. 246

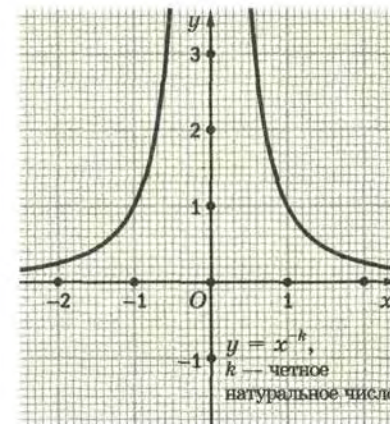


Рис. 247

график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 249). Эти графики проходят через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, обе функции возрастают. Докажем, что такие свойства имеют все функции $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число, большее единицы.

Действительно, поскольку $\sqrt[n]{0} = 0$ и $\sqrt[n]{1} = 1$, то точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$ принадлежат графику функции $y = \sqrt[n]{x}$. Если $x_1 < x_2$, то по монотонности извлечения корня получаем, что $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$. Это означает, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ является возрастающей.

Монотонность извлечения корня позволяет обобщить теоремы 9 и 10 на случай любого рационального показателя.

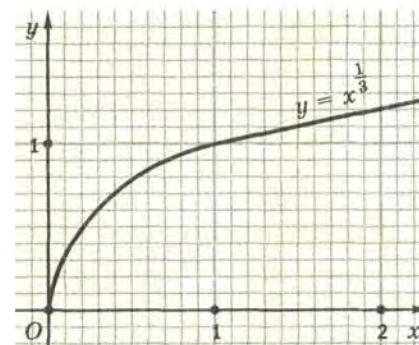


Рис. 248

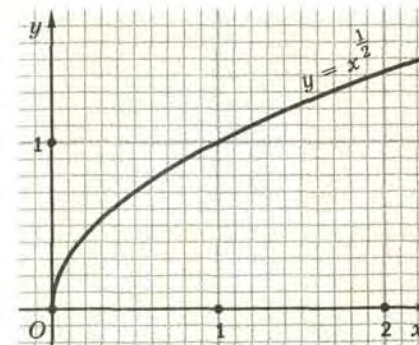


Рис. 249

Теорема 11. Если $p_1 > p_2 > 0$, то

$$\begin{cases} x^{p_1} < x^{p_2} & \text{при } 0 < x < 1, \\ x^{p_1} > x^{p_2} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $p_1 > p_2 > 0$ и $x > 0$. Тогда показатели степеней p_1 и p_2 можно представить дробями с одинаковыми знаменателями и натуральными числителями: $p_1 = \frac{m_1}{n}$, $p_2 = \frac{m_2}{n}$ и $x^{p_1} = x^{\frac{m_1}{n}} = \sqrt[n]{x^{m_1}}$, $x^{p_2} = x^{\frac{m_2}{n}} = \sqrt[n]{x^{m_2}}$.

Пусть $0 < x < 1$. Тогда из теоремы 9 следует, что $x^{m_1} < x^{m_2}$. Используя монотонность извлечения корня, получаем, что $\sqrt[n]{x^{m_1}} < \sqrt[n]{x^{m_2}}$, или $x^{p_1} < x^{p_2}$.

Пусть $x > 1$. Тогда из теоремы 9 следует, что $x^{m_1} > x^{m_2}$. Используя монотонность извлечения корня, получаем, что $\sqrt[n]{x^{m_1}} > \sqrt[n]{x^{m_2}}$, или $x^{p_1} > x^{p_2}$.

Теорема 12. Если $p_2 < p_1 < 0$, то

$$\begin{cases} x^{p_1} > x^{p_2} & \text{при } 0 < x < 1, \\ x^{p_1} < x^{p_2} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 12, как и теоремы 10, основано на свойствах неравенств, связывающих обратные числа.

На рисунке 250 и 251 показаны графики степенных функций при различных значениях показателей p и при отрицательных значениях аргументов.

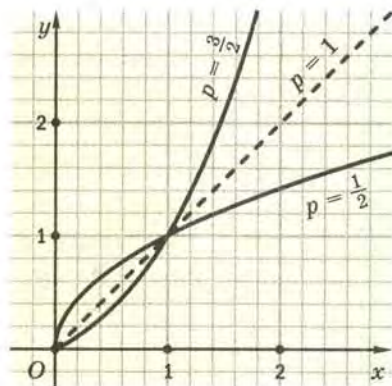


Рис. 250

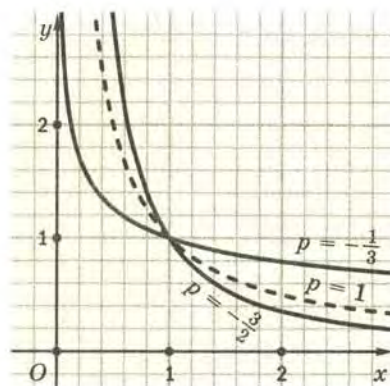


Рис. 251

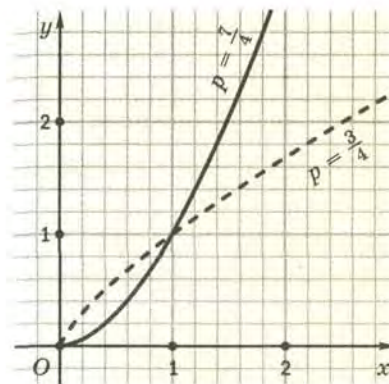


Рис. 252

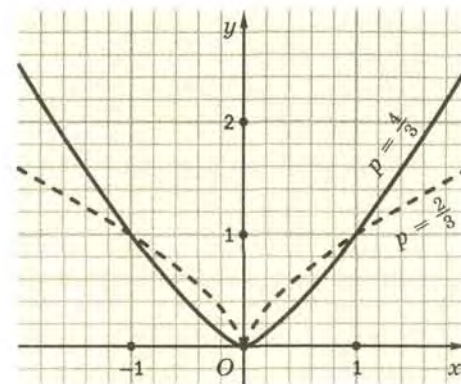


Рис. 253

Чтобы построить весь график функции $y = \sqrt[n]{x^m}$, нужно найти область ее определения и использовать четность или нечетность.

При четном n и нечетном положительном m функция $y = \sqrt[n]{x^m}$ определена на множестве $[0; +\infty)$ и принимает все значения из этого множества. Представление о графиках таких функций дают графики функций $y = \sqrt[4]{x^3}$ и $y = \sqrt[4]{x^7}$, изображенные на рисунке 252.

При нечетном n и четном положительном m функция $y = \sqrt[n]{x^m}$ определена на множестве $(-\infty; +\infty)$, является четной и принимает все неотрицательные значения. Представление о графиках таких функций дают графики функций $y = \sqrt[3]{x^2}$ и $y = \sqrt[3]{x^4}$, изображенные на рисунке 253.

При нечетном n и нечетном положительном m функция $y = \sqrt[n]{x^m}$ определена на множестве $(-\infty; +\infty)$, является нечетной и принимает все действительные значения. Представление о графиках таких функций дают графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[3]{x^5}$, изображенные на рисунке 254.

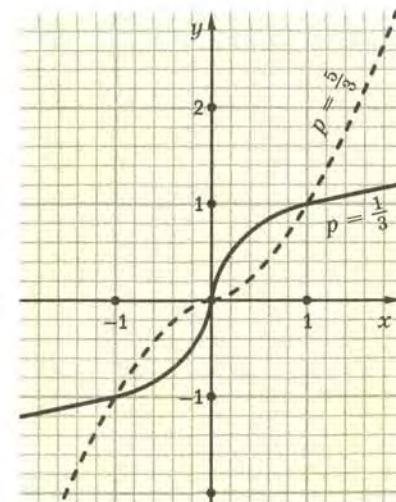


Рис. 254

1. Какая функция называется степенной?
2. Какое множество называют областью определения функции; областью значений функции?
3. Какая функция называется возрастающей на множестве K ; убывающей на множестве K ?
4. Какое число называют наибольшим значением функции на множестве K ; наименьшим значением функции на множестве K ?
5. Какую функцию называют четной; нечетной?
6. Укажите область определения и область значений степенной функции с натуральным показателем; с отрицательным целым показателем.

7. Что собой представляет график функции $y = x^{\frac{1}{n}}$ при четном значении n ; при нечетном значении n ?

8. Что собой представляет график функции $y = x^{-\frac{1}{n}}$ при четном значении n ; при нечетном значении n ?

9. Что собой представляет график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ при $0 < \frac{m}{n} < 1$ и нечетном значении n , если m — нечетное число; если m — четное число?

10. Что собой представляет график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ при $0 < \frac{m}{n} < 1$ и четном значении n ?

11. Что собой представляет график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ при $\frac{m}{n} > 1$ и нечетном значении n , если m — нечетное число; если m — четное число?

12. Что собой представляет график функции $y = -x^{\frac{m}{n}}$ при $\frac{m}{n} > 1$ и четном значении n ?

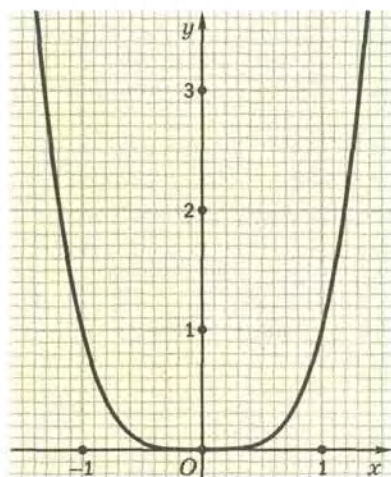


Рис. 255

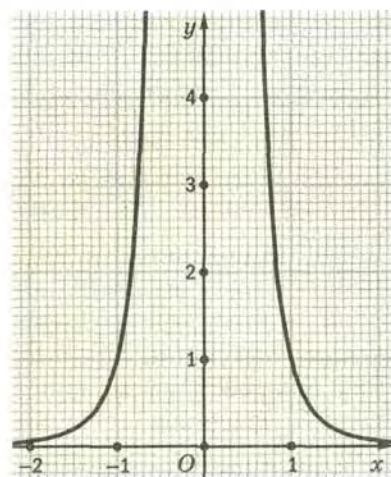


Рис. 256

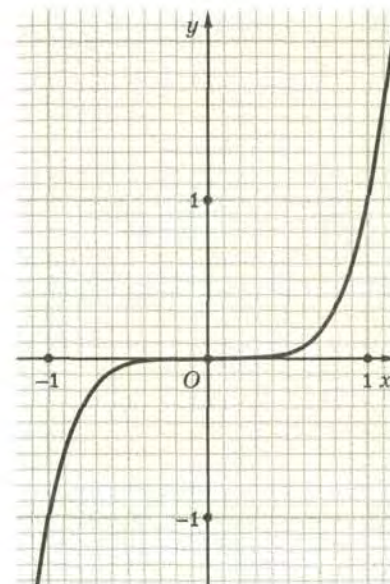


Рис. 257

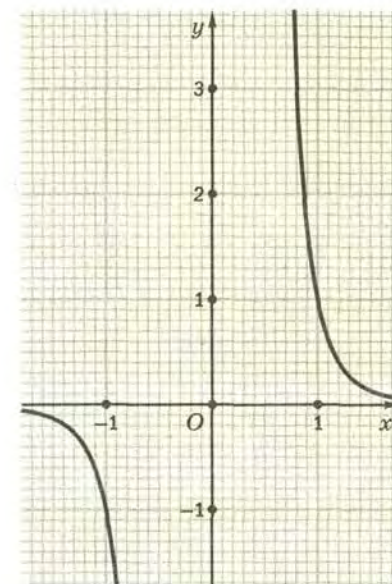


Рис. 258

13. Что собой представляет график функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$ при нечетном значении n , если m — нечетное число; если m — четное число?

14. Что собой представляет график функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ при четном значении n ?

598. Докажите, что график степенной функции $y = x^n$ при любом n проходит через точку $(1; 1)$.

599. Запишите уравнение, которое задает ту же степенную функцию, что и график, изображенный на рисунке:

- а) 255; в) 257;
б) 256; г) 258.

600. Запишите уравнение штриховой кривой и уравнение сплошной кривой, изображенных на рисунке:

- а) 259, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^2$, а другая — функцию $y = x^3$;

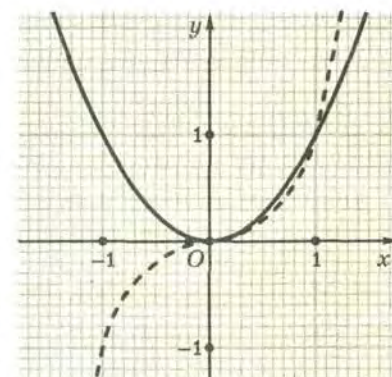


Рис. 259

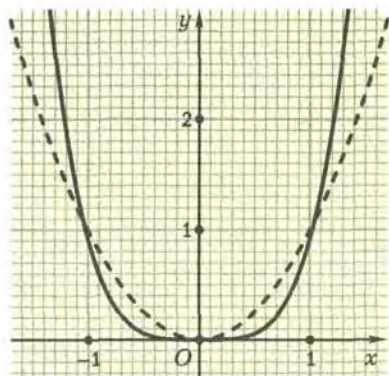


Рис. 260

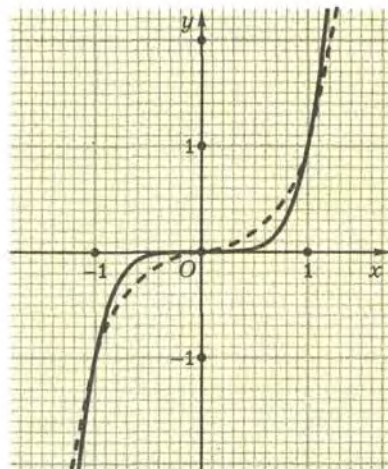


Рис. 261

б) 260, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^2$, а другая — функцию $y = x^4$;

в) 261, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^3$, а другая — функцию $y = x^5$.

601. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^2$ и $y = x^4$; б) $y = x^3$ и $y = x^5$.

602. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^{-2}$ и $y = x^{-5}$; б) $y = x^{-3}$ и $y = x^{-6}$.

603. Докажите, что степенная функция $y = x^n$, где n — натуральное число, при:

- а) нечетном значении показателя n возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$;
- б) четном значении показателя n на промежутке $(-\infty; 0]$ возрастает и на промежутке $[0; +\infty)$ убывает;
- в) нечетном значении показателя n является нечетной;
- г) четном значении показателя n является четной.

604. Докажите, что степенная функция $y = x^{-k}$, где k — натуральное число, при:

- а) нечетном значении показателя n убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$;

- б) четном значении показателя n на промежутке $(-\infty; 0)$ возрастает и на промежутке $(0; +\infty)$ убывает;
- в) нечетном значении показателя n является нечетной;
- г) четном значении показателя n является четной.

605. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^4$ и $y = x^4 + 2$; в) $y = x^4$ и $y = \frac{1}{2} x^4$;
 б) $y = x^4$ и $y = (x + 2)^4$; г) $y = x^4$ и $y = \left(\frac{1}{2} x\right)^4$.

606. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^7$ и $y = (-x)^7$; в) $y = x^7$ и $y = 0,1x^7 + 1$;
 б) $y = x^7$ и $y = |x|^7$; г) $y = x^7$ и $y = (0,1x + 1)^7$.

607. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^{-4}$ и $y = x^{-4} + 2$; в) $y = x^{-4}$ и $y = -2x^{-4}$;
 б) $y = x^{-4}$ и $y = (x - 2)^{-4}$; г) $y = x^{-4}$ и $y = (2x)^{-4}$.

608. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4$ на промежутке:

а) $[1; 3]$; б) $[-1; 3]$; в) $(-1; 3]$; г) $(-1; -3)$.

609. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^5$ на промежутке:

а) $[-0,5; 2]$; в) $(-0,5; 2]$;
 б) $(-0,5; 2]$; г) $[-0,5; 2]$.

610. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-4}$ на промежутке:

а) $[1; 3]$; в) $[-1; 3]$; д) $(-1; 3]$;
 б) $[-3; -1]$; г) $(-1; 3]$; е) $[-1; 3]$.

611. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-5}$ на промежутке:

а) $[1; 3]$; в) $[-1; 3]$; д) $(-1; 3]$;
 б) $[-3; -1]$; г) $(-1; 3]$; е) $[-1; 3]$.

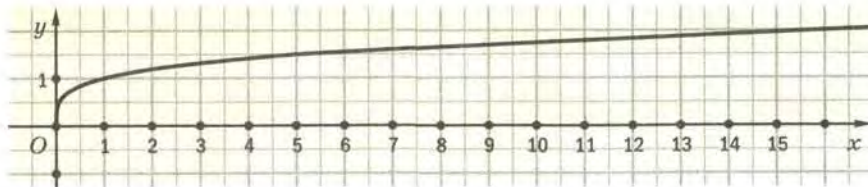


Рис. 262

612. Запишите уравнение, которое задает ту же степенную функцию вида $y = x^{\frac{1}{n}}$, что и график, изображенный на рисунке:

- а) 262; б) 263.

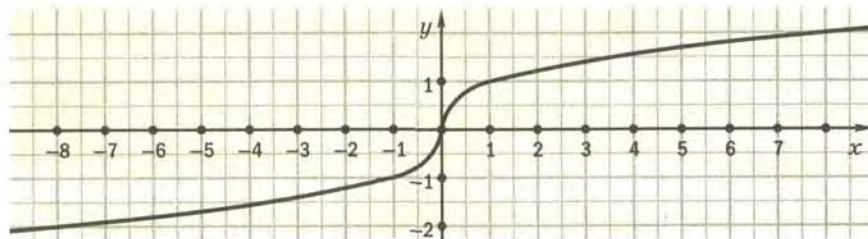


Рис. 263

613. Запишите уравнение штриховой кривой и уравнение сплошной кривой, изображенных на рисунке:

- а) 264, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{1}{5}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{10}}$;
б) 265, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{1}{3}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{7}}$;

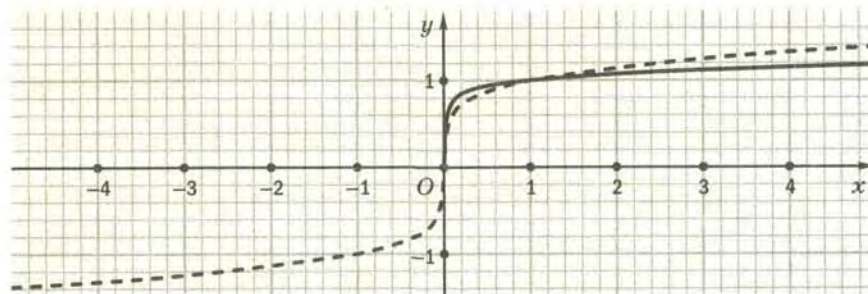


Рис. 264

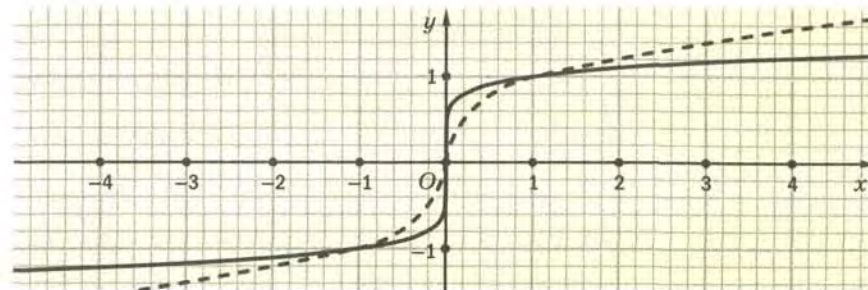


Рис. 265

в) 266, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{1}{4}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{1}{6}}$.

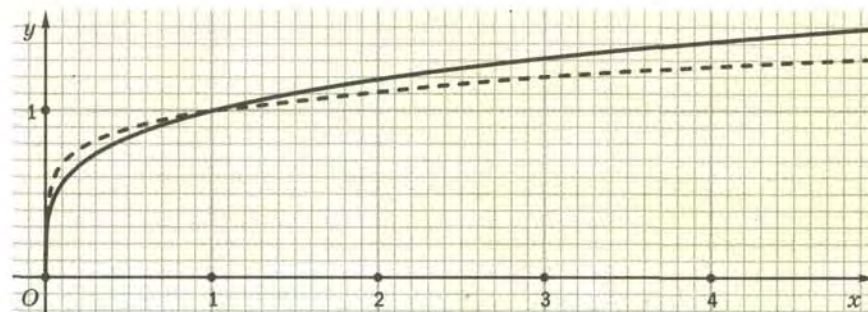


Рис. 266

614. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{\frac{1}{7}}$ на промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

615. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{\frac{1}{6}}$ на промежутке $[0; 5]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

616. В одной системе координат постройте графики функций:

- а) $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$;
б) $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{1}{5}}$.

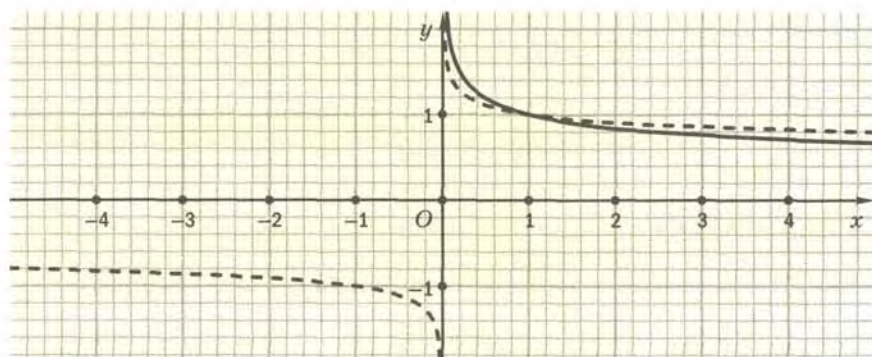


Рис. 267

617. Запишите уравнение штриховой кривой и уравнение сплошной кривой, изображенных на рисунке:

а) 267, учитывая, что одна из них представляет функцию

$y = x^{-\frac{1}{7}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{1}{4}}$;

б) 268, учитывая, что одна из них представляет функцию

$y = x^{-\frac{1}{5}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{1}{11}}$.

618. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{-\frac{1}{7}}$ на промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

619. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{-\frac{1}{6}}$ на промежутке $[0; 4]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

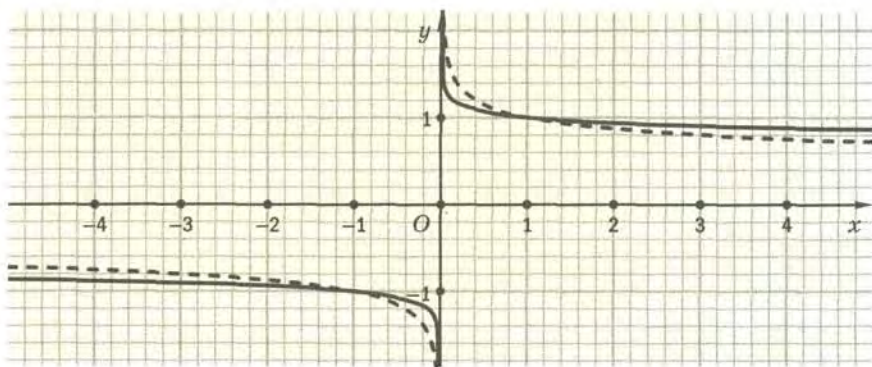


Рис. 268

620. В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ и $y = x^{-\frac{1}{4}}$; б) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ и $y = x^{-\frac{1}{5}}$.

621. Запишите уравнение, которое задает ту же степенную функцию вида $y = x^{\frac{m}{n}}$, что и график, изображенный на рисунке:

а) 269; в) 271;

б) 270; г) 272.

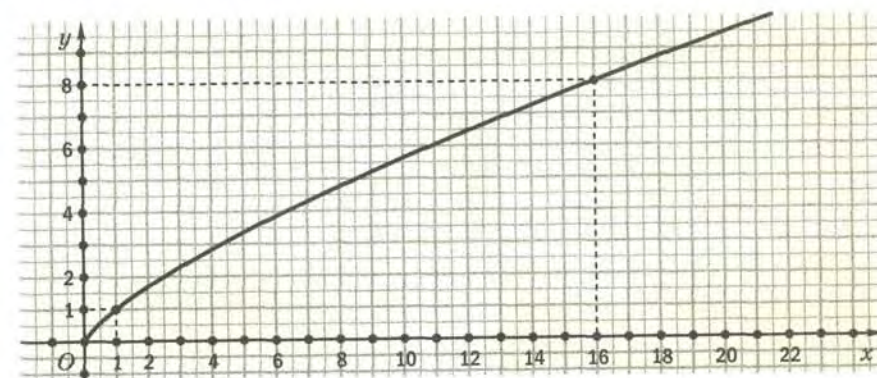


Рис. 269

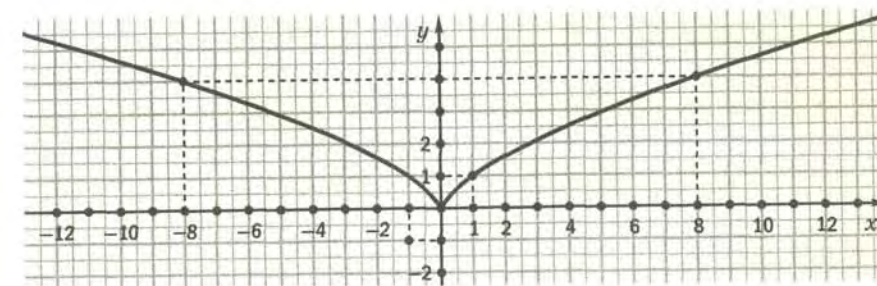


Рис. 270

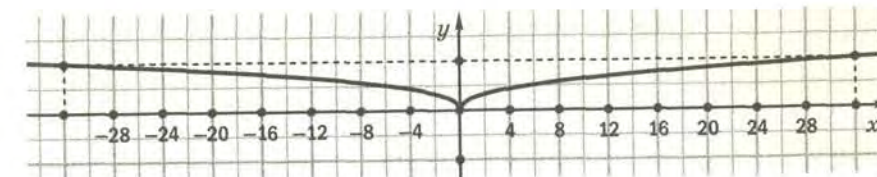


Рис. 271

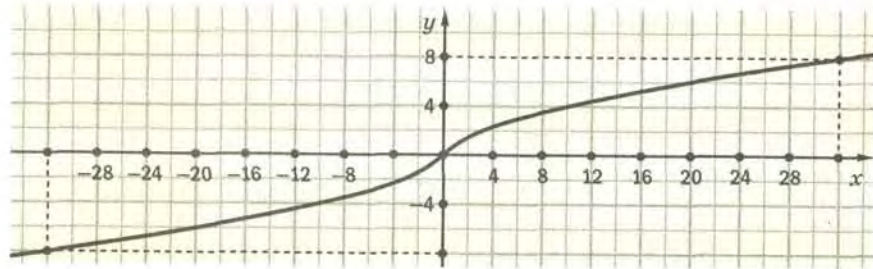


Рис. 272

622. Запишите уравнение штриховой кривой и уравнение сплошной кривой, изображенных на рисунке:

- а) 273, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{5}{8}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{4}{5}}$;
 б) 274, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{7}{10}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{7}{13}}$;

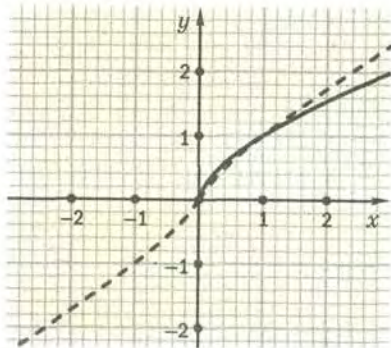


Рис. 273

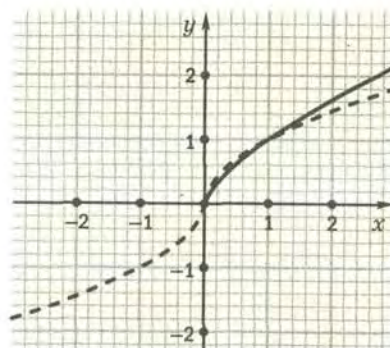


Рис. 274

- в) 275, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{15}{12}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{14}{9}}$;
 г) 276, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{\frac{17}{10}}$, а другая — функцию $y = x^{\frac{17}{13}}$;

623. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{\frac{15}{7}}$ на промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

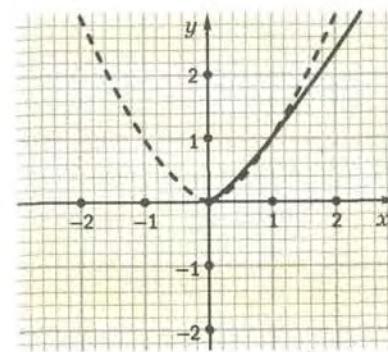


Рис. 275

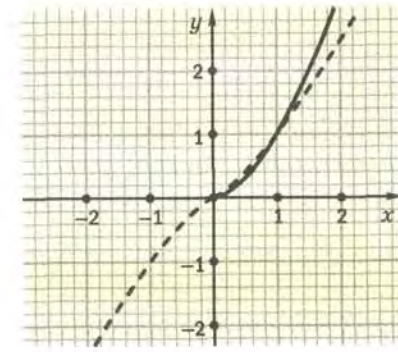


Рис. 276

624. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{\frac{12}{7}}$ на промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

625. Запишите уравнение штриховой кривой и уравнение сплошной кривой, изображенных на рисунке:

- а) 277, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{-\frac{7}{12}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{19}{12}}$;
 б) 278, учитывая, что одна из них представляет функцию $y = x^{-\frac{8}{17}}$, а другая — функцию $y = x^{-\frac{19}{17}}$.

626. Используя микрокалькулятор, составьте таблицу значений функции $y = x^{-\frac{15}{7}}$ на промежутке $[-2; 2]$ с шагом 0,5 и постройте ее график.

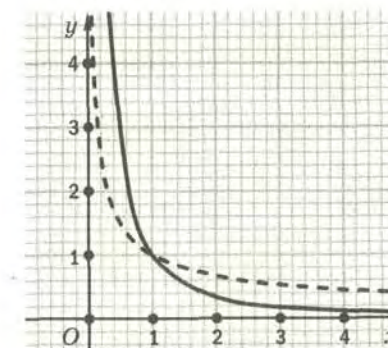


Рис. 277

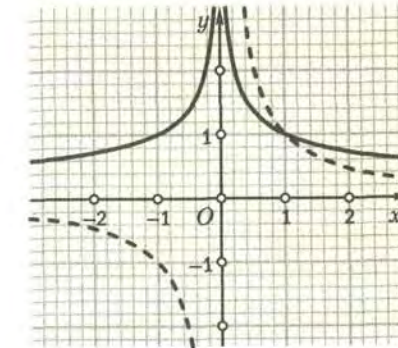


Рис. 278

627. Докажите, что степенная функция $y = x^{\frac{1}{n}}$, где n — натуральное число, при:

- а) нечетном значении n возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$;
- б) четном значении n возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;
- в) нечетном значении n является нечетной.

628. Докажите, что степенная функция $y = x^{-\frac{1}{n}}$, где n — натуральное число, при:

- а) нечетном значении n убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$;
- б) четном значении n убывает на промежутке $[0; +\infty)$;
- в) нечетном значении n является нечетной.

629. Докажите, что степенная функция $y = x^{\frac{m}{n}}$, где m и n — натуральные числа, при:

- а) нечетном значении n и четном значении m убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;
- б) нечетном значении n и нечетном значении m возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$;
- в) нечетном значении n и нечетном значении m является нечетной;
- г) нечетном значении n и четном значении m является четной.

630. Докажите, что степенная функция $y = x^{-\frac{m}{n}}$, где m и n — натуральные числа, при:

- а) нечетном значении n и нечетном значении m убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[0; +\infty)$;
- б) нечетном значении n и четном значении m возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$;
- в) четном значении n и нечетном значении m убывает на промежутке $[0; +\infty)$;
- г) нечетном значении n и нечетном значении m является нечетной;
- д) нечетном значении n и четном значении m является четной.

631. В одной системе координат постройте графики функций:

- а) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = x^{\frac{1}{6}} + 2$;
- б) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = x^{\frac{1}{6}} - 2$;
- в) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = -x^{\frac{1}{6}}$;
- г) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = 2x^{\frac{1}{6}}$;
- д) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{6}}$;
- е) $y = x^{\frac{1}{6}}$ и $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{6}}$.

632. В одной системе координат постройте графики функций:

- а) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = x^{-\frac{1}{6}} + 2$;
- б) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = x^{-\frac{1}{6}} - 2$;
- в) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = -x^{-\frac{1}{6}}$;
- г) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = 2x^{-\frac{1}{6}}$;
- д) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}}$;
- е) $y = x^{-\frac{1}{6}}$ и $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\frac{1}{6}}$.

633. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{1}{7}}$ на промежутке:

- а) $[1; 128]$;
- б) $[-128; -1]$;
- в) $[-1; 128]$;
- г) $[-128; 1]$;
- д) $(1; 128]$;
- е) $[-128; -1]$;
- ж) $(-1; 128]$;
- з) $(-128; -1)$.

634. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-\frac{1}{7}}$ на промежутке:

- а) $[1; 128]$;
- б) $[-128; -1]$;
- в) $[-1; 128]$;
- г) $[-128; 1]$;
- д) $(1; 128]$;
- е) $[-128; -1]$;
- ж) $(-1; 128]$;
- з) $(-128; -1)$.

635. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{\frac{2}{3}}$ на промежутке:

- а) $[1; 8]$;
- б) $[-8; -1]$;
- в) $[0; 8]$;
- г) $[-8; 1]$;
- д) $(1; 8]$;
- е) $[-8; -1]$;
- ж) $(0; 8]$;
- з) $(-8; -1)$.

636. На промежутке $[1; 10]$ найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- а) $y = x^{\frac{2}{3}}$; г) $y = x^{\frac{3}{2}}$; ж) $x^{-\frac{3}{2}}$; к) $x^{-\frac{3}{7}}$.
 б) $y = x^{\frac{3}{4}}$; д) $y = x^{\frac{4}{3}}$; з) $x^{-\frac{4}{3}}$;
 в) $y = x^{\frac{3}{5}}$; е) $y = x^{\frac{5}{3}}$; и) $x^{-\frac{5}{3}}$;

637. Используя график функции $y = -x^2 - 4x + 5$, решите неравенство:

- а) $-x^2 - 4x + 5 < 0$; в) $-x^2 - 4x + 5 > 0$;
 б) $-x^2 - 4x + 5 \leq 0$; г) $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$.

638. Решите неравенство:

- а) $2 - \frac{a-3}{a-2} > \frac{a-2}{a-1}$; в) $3 - \frac{2h-17}{h-5} > \frac{h-5}{h+2}$;
 б) $\frac{p+2}{2p-3} > 1$; г) $\frac{5q-3}{4-q} < 2$.

639. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{a^2 - 14} = \sqrt{2}$; в) $c = \sqrt{6 - c}$;
 б) $b - \sqrt{b-1} = 3$; г) $1 + \sqrt{7 + 2d} = d - 3$.

640. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{2e+1} < 3$; в) $\sqrt{\frac{g+3}{4-g}} > 2$;
 б) $\sqrt{3r-4} \geq 2$; г) $\sqrt{2h+10} \leq 3h-5$.

641. Расстояние от точки A до точки B , в которой прямая, проходящая через точку A , касается окружности, на 4 см больше расстояния до точки C , в которой другая прямая, проходящая через точку A , пересекает окружность. Найдите AB , учитывая, что расстояние от точки A до другой точки D пересечения прямой AC с окружностью равно 20 см.

642. Перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла прямоугольного треугольника к гипотенузе, на 4 м больше одного из отрезков, на которые его основание разделяет гипотенузу. Найдите стороны треугольника, учитывая, что другой отрезок гипотенузы равен 24 м.

643. Точка M пересечения двух хорд AB и CD окружности делит хорду AB на части AM и MB в отношении $2 : 1$, а другую хорду на такие части, что отрезок CM на 3 см больше отрезка MB , а отрезок MD равен 8 см. Найдите эти хорды.

644. Сан-Паулу, Рио-де-Жанейро, Форталеза, Салвадор — крупнейшие портовые города Бразилии (рис. 279). Количество жителей Форталезы относится к увеличенному на 79 тыс. чел. количеству жителей Салвадора как $23 : 27$ и на 7827 тыс. чел. меньше количества жителей Сан-Паулу, а количество жителей Сан-Паулу относится к уменьшенному на 13 тыс. чел. количеству жителей Рио-де-Жанейро как $107 : 64$. Найдите население этих городов, учитывая, что в Рио-де-Жанейро и Салвадоре вместе живут 8569 тыс. чел.



Рис. 279

645. Белу-Оризонти, Бразилия, Куритиба, Манаус — наибольшие материковые города Бразилии (см. рис. 279). Количество жителей Бразилии относится к уменьшенному на 28 тыс. чел. количеству жителей Белу-Оризонти как $11:12$ и на 565 тыс. чел. больше количества жителей Манауса, а увеличенное на 5 тыс. чел. количество жителей Куритибы относится к количеству жителей Манауса как $27:25$. Найдите население этих городов, учитывая, что в Белу-Оризонти на 666 тыс. чел. больше, чем в Куритибе.

* * *

646. Числа x_0 и x_1 , x_0 и x_2 , ..., x_0 и x_n являются корнями квадратных трехчленов $x^2 + a_1x + b_1$, $x^2 + a_2x + b_2$, ..., $x^2 + a_nx + b_n$ соответственно. Найдите корни квадратного трехчлена $x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$.

647. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде $\frac{mn+1}{m+n}$ при определенных натуральных значениях m и n .

648. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N (M ближе к B) так, что $\angle MAB = \angle NAC$ и $MN = MA$. Определите величину угла NAB .

16*. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее действие извлечения корня из выражения с переменной или действие возведения в дробную степень выражения с переменной.

Существенным компонентом решения иррационального уравнения является учет свойств используемых преобразований.

Если утверждения $P(x)$ и $Q(x)$ истинны при одних и тех же значениях переменной x , то говорят, что утверждение $Q(x)$ равносильно утверждению $P(x)$.

Равносильность уравнений $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ означает, что они имеют одни и те же корни.

При решении иррациональных уравнений часто используют прием возведения левой и правой частей уравнения в одну степень, при котором используется преобразование, не являющееся преобразованием равносильности.

Пример 1. Решим уравнение $x - 1 = \sqrt{13 - x}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$x^2 - 2x + 1 = 13 - x, \text{ или } x^2 - x - 12 = 0,$$

корнями которого являются числа -3 и 4 .

Подстановка чисел -3 и 4 в данное уравнение дает числовые равенства

$$-3 - 1 = \sqrt{13 + 3} \text{ и } 4 - 1 = \sqrt{13 - 4},$$

из которых истинно только второе. Это означает, что число -3 — посторонний корень уравнения.

Причина появления постороннего корня в том, что к уравнению $x^2 - 2x + 1 = 13 - x$ возведением в квадрат можно прийти не только от уравнения $x - 1 = \sqrt{13 - x}$, но и от уравнения $1 - x = \sqrt{13 - x}$, которое как раз и имеет корнем число -3 .

В рассмотренном примере каждый корень уравнения $x - 1 = \sqrt{13 - x}$ является корнем уравнения $x^2 - 2x + 1 = 13 - x$, полученного в результате возведения в квадрат. Говорят, что уравнение $x^2 - 2x + 1 = 13 - x$ *следует* из уравнения $x - 1 = \sqrt{13 - x}$. Вместе с этим уравнение $1 - x = \sqrt{13 - x}$ не следует из уравнения $x^2 - 2x + 1 = 13 - x$, так как число -3 является корнем уравнения $x^2 - 2x + 1 = 13 - x$, но не является корнем уравнения $1 - x = \sqrt{13 - x}$.

Вообще, если утверждение $Q(x)$ истинно при всех значениях переменной x , при которых истинно утверждение $P(x)$, то говорят, что утверждение $Q(x)$ *следует* из утверждения $P(x)$.

Следование уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ из уравнения $f(x) = g(x)$ означает, что каждый корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$, но уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ может иметь и дополнительные корни.

Равносильность утверждений $P(x)$ и $Q(x)$ означает, что из утверждения $P(x)$ следует утверждение $Q(x)$ и из утверждения $Q(x)$ следует утверждение $P(x)$.

Теорема 13. Если n — четное число, то из уравнения $f(x) = g(x)$ *следует* уравнение $f^n(x) = g^n(x)$.

Доказательство. Пусть n — четное число и a — корень уравнения $f(x) = g(x)$. Тогда истинно числовое равенство $f(a) = g(a)$. Если возведем в степень n это равенство, то полу-

чим истинное равенство $f^n(a) = g^n(a)$, а это означает, что число a — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$.

Поскольку каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $f^n(x) = g^n(x)$, то из уравнения $f(x) = g(x)$ следует уравнение $f^n(x) = g^n(x)$.

Теорема 14. Если n — нечетное натуральное число, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно уравнению $f^n(x) = g^n(x)$.

Доказательство. Уравнение $f^n(x) = g^n(x)$, как доказано в теореме 13, является следствием уравнения $f(x) = g(x)$. Поэтому остается доказать, что из уравнения $f^n(x) = g^n(x)$ при нечетном n следует уравнение $f(x) = g(x)$.

Пусть n — нечетное натуральное число и a — корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$. Тогда истинное числовое равенство $f^n(a) = g^n(a)$, как доказано в параграфе 12, равносильно числовому равенству $f(a) = g(a)$. Значит, число a — корень уравнения $f(x) = g(x)$. Поскольку каждый корень уравнения $f^n(x) = g^n(x)$ является корнем уравнения $f(x) = g(x)$, то из уравнения $f^n(x) = g^n(x)$ следует уравнение $f(x) = g(x)$.

Из примера 1 видно, что утверждение, обратное утверждению 13, при четном n не всегда истинно, так как среди корней уравнения $f^2(x) = g^2(x)$ есть корни не только уравнения $f(x) = g(x)$, но и уравнения $f(x) = -g(x)$. Поскольку возведение левой и правой частей уравнения в четную степень дает уравнение, которое следует из данного уравнения, то, решив уравнение-следствие, нужно еще проверить, являются ли его корни корнями исходного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt[3]{8c^3 + 21c^2 + 7} = 2c + 7$.

Будем последовательно получать:

$$\sqrt[3]{8c^3 + 21c^2 + 7} = 2c + 7;$$

$$8c^3 + 21c^2 + 7 = 8c^3 + 84c^2 + 294c + 343;$$

$$63c^2 + 294c + 336 = 0;$$

$$3c^2 + 14c + 16 = 0;$$

$$c = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 3 \cdot 16}}{3} = \frac{-7 \pm 1}{3};$$

$$c_1 = -\frac{8}{3}; c_2 = -2.$$

Здесь последовательно выполнялись следующие преобразования: возведение обеих частей уравнения в куб; перенос слагаемого из одной части уравнения в другую и приведение подобных; деление всех членов уравнения на одно и то же число. Поскольку все эти преобразования являются преобразованиями равносильности, то результирующее уравнение $3c^2 + 14c + 16 = 0$ равносильно данному уравнению $\sqrt[3]{8c^3 + 21c^2 + 7} = 2c + 7$ и корни результирующего уравнения являются корнями данного уравнения.

Ответ. $-\frac{8}{3}; -2$.

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt[3]{3d - 11} + \sqrt[3]{d - 3} = \sqrt[3]{7 - 2d}$.

Возведем обе части уравнения в куб, используя при этом формулу $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$:

$$3d - 11 + d - 3 + 3\sqrt[3]{3d - 11}\sqrt[3]{d - 3}(\sqrt[3]{3d - 11} + \sqrt[3]{d - 3}) = 7 - 2d.$$

Приведем подобные и разделим обе части уравнения на 3:

$$\sqrt[3]{3d - 11}\sqrt[3]{d - 3}(\sqrt[3]{3d - 11} + \sqrt[3]{d - 3}) = 7 - 2d.$$

Теперь учтем, что в соответствии с условием сумма $\sqrt[3]{3d - 11} + \sqrt[3]{d - 3}$ равна $\sqrt[3]{7 - 2d}$:

$$\sqrt[3]{3d - 11}\sqrt[3]{d - 3}\sqrt[3]{7 - 2d} = 7 - 2d.$$

Возведем это уравнение в куб:

$$(3d - 11)(d - 3)(7 - 2d) = (7 - 2d)^3.$$

Решим полученное рациональное уравнение:

$$7 - 2d = 0 \text{ или } (3d - 11)(d - 3) = (7 - 2d)^2;$$

$$7 - 2d = 0 \text{ или } 3d^2 - 20d + 33 = 49 - 28d + 4d^2;$$

$$7 - 2d = 0 \text{ или } d^2 - 8d + 16 = 0;$$

$$7 - 2d = 0 \text{ или } (d - 4)^2;$$

$$d = 3,5 \text{ или } d = 4.$$

В этом решении не все использованные преобразования являются преобразованиями равносильности, именно замена суммы $\sqrt[3]{3d - 11} + \sqrt[3]{d - 3}$ выражением $\sqrt[3]{7 - 2d}$ — не являет-

ся преобразованием равносильности. Действительно, равенство $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = z^3$ равносильно равенству $x + y = z$, а если в первом равенстве выражение $x + y$ заменить выражением z , то получим равенство $x^3 + y^3 + 3xyz = z^3$, которое уже не равносильно равенству $x + y = z$: при $(x; y; z) = (1; 1; -1)$ первое равенство истинно, а второе ложно. Поэтому если при решении уравнения делаются подобные замены, нужно проводить проверку.

Подстановка числа 3,5 дает истинное равенство $\sqrt[3]{3 \cdot 3,5 - 11} + \sqrt[3]{3,5 - 3} = \sqrt[3]{7 - 2 \cdot 3,5}$, а подстановка числа 4 — ложное равенство $\sqrt[3]{3 \cdot 4 - 11} + \sqrt[3]{4 - 3} = \sqrt[3]{7 - 2 \cdot 4}$.

Ответ. 3,5.

При решении иррациональных уравнений может использоваться прием *введения вспомогательных переменных*.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} = 3.$$

Обратим внимание на то, что подкоренные выражения обоих радикалов отличаются только свободными членами. Это позволяет один радикал выразить через другой. Обозначим y , например, второй радикал:

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} = y.$$

Тогда $x^2 - 3x - 8 = y^3$. Значит,

$$x^2 - 3x + 1 = (x^2 - 3x - 8) + 9 = y^3 + 9.$$

Это дает возможность данное уравнение заменить уравнением

$$\sqrt[3]{y^3 + 9} - y = 3.$$

Решим его:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y^3 + 9} - y &= 3; \\ \sqrt[3]{y^3 + 9} &= y + 3; \\ y^3 + 9 &= (y + 3)^3; \\ y^3 + 9 &= y^3 + 9y^2 + 27y + 27; \\ 9y^2 + 27y + 18 &= 0; \\ y^2 + 3y + 2 &= 0; \\ y &= -1 \text{ или } y = -2. \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной x :

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} = -1 \text{ или } \sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} = -2.$$

Решим полученную совокупность уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} &= -1 \text{ или } \sqrt[3]{x^2 - 3x - 8} = -2; \\ x^2 - 3x - 8 &= -1 \text{ или } x^2 - 3x - 8 = -8; \\ x^2 - 3x - 7 &= 0 \text{ или } x^2 - 3x = 0; \\ x &= \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \text{ или } x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} \text{ или } x = 0 \text{ или } x = 3. \end{aligned}$$

Учитывая, что все преобразования, использованные при решении, являются преобразованиями равносильности, записываем в ответ все четыре найденных числа.

Ответ. $\frac{3 - \sqrt{37}}{2}; 0; 3; \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$.

Иной раз оказывается удобным ввести две вспомогательные переменные.

Пример 5. Решим уравнение $\sqrt[3]{7t + 20} - \sqrt[3]{7t + 1} = 1$.

Обозначим m и n первый и второй радикалы соответственно:

$$\begin{cases} m = \sqrt[3]{7t + 20}, \\ n = \sqrt[3]{7t + 1}. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда данное уравнение запишется так:

$$m - n = 1.$$

То, что переменные m и n являются зависимыми от t , позволяет получить еще одно уравнение, если возвести в куб оба уравнения системы (1) и вычесть из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} m^3 = 7t + 20, \\ n^3 = 7t + 1; \end{cases} \quad m^3 - n^3 = 19.$$

Таким образом, для нахождения значений переменных m и n получилась система

$$\begin{cases} m - n = 1, \\ m^3 - n^3 = 19. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{aligned} \begin{cases} m - n = 1, \\ m^3 - n^3 = 19 \end{cases} &\equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ (m - n)(m^2 + mn + n^2) = 19 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ m^2 + mn + n^2 = 19 \end{cases} \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ (m^2 - 2mn + n^2) + 3mn = 19 \end{cases} \equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ (m - n)^2 + 3mn = 19 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ 1 + 3mn = 19 \end{cases} \equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ 3mn = 18 \end{cases} \equiv \begin{cases} m - n = 1, \\ mn = 6 \end{cases} \equiv \\ &\equiv (m; n) = (-2; -3) \text{ или } (m; n) = (3; 2). \end{aligned}$$

Теперь, чтобы найти значения исходной переменной, достаточно решить любое из уравнений системы

$$\begin{cases} m = \sqrt[3]{7t + 20}, \\ n = \sqrt[3]{7t + 1}. \end{cases}$$

Для $m = -2$ получим:

$$-2 = \sqrt[3]{7t + 20} \equiv -8 = 7t + 20 \equiv 7t = -28 \equiv t = -4.$$

При $m = 3$ получим:

$$3 = \sqrt[3]{7t + 20} \equiv 27 = 7t + 20 \equiv 7t = 7 \equiv t = 1.$$

Проанализировав выполненные преобразования, приходим к выводу, что все они являются преобразованиями равносильности. Поэтому оба найденных значения переменной t являются корнями данного уравнения.

Ответ. $-4; 1$.

Пример 6. Решим уравнение $y^2 + \sqrt{y^2 + 5} = 7$.

Решение проведем, используя переход к равносильной системе условий:

$$\begin{aligned} y^2 + \sqrt{y^2 + 5} = 7 &\equiv \sqrt{y^2 + 5} = 7 - y^2 \equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 + 5 = (7 - y^2)^2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 + 5 = 49 - 14y^2 + y^4 \end{cases} \equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^4 - 15y^2 + 44 = 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{2} \end{cases} \equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 = \frac{15 \pm 7}{2} \end{cases} \equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 = 4 \text{ или } y^2 = 11 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} 7 - y^2 \geq 0, \\ y^2 = 4 \end{cases} \equiv y = -2 \text{ или } y = 2. \end{aligned}$$

Ответ. $-2; 2$.



1. Какое уравнение называется иррациональным?
2. Какие утверждения $P(x)$ и $Q(x)$ с переменной называют равносильными?
3. Когда говорят, что из утверждения $P(x)$ следует утверждение $Q(x)$?
4. Что означает равносильность уравнений $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$?
5. Что означает *уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ следует из уравнения $f(x) = g(x)$* ?
6. Как отношение равносильности уравнений связано с отношением следования?
7. Сформулируйте утверждение о возведении левой и правой частей уравнения в четную степень.
8. Сформулируйте утверждение о возведении левой и правой частей уравнения в нечетную степень.

649. Установите, равносильны ли уравнения:

- а) $x^2 - x = 0$ и $x(x - 1) = 0$;
- б) $x^2 - x = 0$ и $x = 0$;
- в) $x^2 - x = 0$ и $x(x - 1)(x + 1) = 0$;
- г) $x^2 - x = 0$ и $x = 1$;
- д) $x^2 - x = 0$ и $2x^2 - 2x = 0$;
- е) $x^2 - x = 0$ и $x^2 - x + 3 = 3$;
- ж) $x^2 - x = 0$ и $2x^3 + x^2 - x = 2x^3$;
- з) $x^2 - x = 0$ и $\frac{x^2 - x}{x^2} = 0$.

650. Установите, равносильны ли уравнения:

- а) $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ и $t^4 + 3t^2 = 6$;
- б) $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ и $\frac{1}{3}t^4 + t^2 - 2 = 0$;
- в) $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ и $t^7 + 3t^5 - 6t^3 = 0$;
- г) $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ и $t^2 + \frac{3}{t^2} - \frac{6}{t^4} = 0$.

651. Установите, следует ли из уравнения $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ уравнение:

- а) $t^4 + 3t^2 = 6$;
- б) $\frac{1}{3}t^4 + t^2 - 2 = 0$;
- в) $t^7 + 3t^5 - 6t^3 = 0$;
- г) $t^2 + \frac{3}{t^2} - \frac{6}{t^4} = 0$.

652. Установите, следует ли уравнение $t^4 + 3t^2 - 6 = 0$ из уравнения:

- а) $t^4 + 3t^2 = 6$;
- б) $\frac{1}{3}t^4 + t^2 - 2 = 0$;
- в) $t^7 + 3t^5 - 6t^3 = 0$;
- г) $t^2 + \frac{3}{t^2} - \frac{6}{t^4} = 0$.

653. Установите, следует ли из уравнения $x^2 - x = 0$ уравнение:

а) $2x^2 - 2x = 0$; в) $x(x-1)(x+1) = 0$;

б) $x = 0$; г) $\frac{x^2 - x}{x^2} = 0$.

654. Установите, следует ли уравнение $x^2 - x = 0$ из уравнения:

а) $2x^2 - 2x = 0$; в) $x(x-1)(x+1) = 0$;

б) $x = 0$; г) $\frac{x^2 - x}{x^2} = 0$.

655. Решите уравнение:

а) $\sqrt{(a+1)(a+6)} = 6$; в) $\sqrt{||i+2|+i|} = 1$;

б) $\sqrt{7-|3-c^2|} = 1$; г) $\sqrt{82-\sqrt{m-8}} = 9$.

656. Решите уравнение:

а) $\sqrt{z+2} = z$; г) $\sqrt{0,4-k^2} = 3k$;

б) $\sqrt{3w+4} = w$; д) $\sqrt{l^2-l-8} = l-2$;

в) $\sqrt{20-y^2} = 2y$; е) $\sqrt{m^2+m-6} = m-1$.

657. Решите уравнение:

а) $\sqrt{z^2+z-1} = z$; в) $\sqrt{3-|l+3|} = l+2$;

б) $\sqrt{2r^2+8r+7-2} = r$; г) $g + \sqrt{2g^2-7g+5} = 1$.

658. Решите уравнение:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5-q}} = \sqrt{q}$; в) $\sqrt{j^4-2j-5} = 1-j$;

б) $s - \sqrt[3]{s^2-s-1} = 1$; г) $\sqrt{p^2-3p+5} + p^2 = 3p+7$.

659. Решите уравнение:

а) $(y-1)\sqrt{y^2-y-6} = 6y-6$;

б) $(u+2)\sqrt{u^2-u-20} = 6u+12$;

в) $(t+4)(t+1) + \sqrt{t^2+5t+2} = 8$;

г) $\sqrt{8r+1} + \sqrt{3r-5} = \sqrt{7r+4} + \sqrt{2r-2}$.

660. Решите уравнение:

а) $\sqrt{12-b} = b$;

б) $\sqrt{6-4y-y^2} = y+4$;

в) $\sqrt{h+5} - \sqrt{h-3} = 2$;

г) $\sqrt{n+3} + \sqrt{3n-2} = 7$;

д) $\sqrt{2u+6} - \sqrt{u+1} = 2$;

е) $\sqrt{j+5} - \sqrt{j} = 1$;

ж) $\sqrt{m+10} - \sqrt{m+3} = \sqrt{4m-23}$;

з) $\sqrt{11i+3} - \sqrt{2-i} = \sqrt{9i+7} - \sqrt{i-2}$.

661. Решите уравнение:

а) $\sqrt{q+2} - \sqrt{q-1} = \sqrt{2q-3}$;

б) $\sqrt{v+7} = \sqrt{3v+19} - \sqrt{v+2}$;

в) $\sqrt{5z+1} - \sqrt{6z-2} = \sqrt{z+6} - \sqrt{2z+3}$;

г) $\sqrt{m+1} - \sqrt{9-m} = \sqrt{2m-12}$.

662. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2c-4} - \sqrt{c-3} - \sqrt{3c-11} = 0$;

б) $\sqrt{m+2} - \sqrt{m-1} - \sqrt{2m-3} = 0$;

в) $2\sqrt{l-1} - \sqrt{l+2} - \sqrt{5l-10} = 0$;

г) $2\sqrt{r} + \sqrt{5-r} = \sqrt{r+21}$.

663. Решите уравнение:

а) $(u^2-4)\sqrt{u+1} = 0$; в) $(s-3)\sqrt{s^2-5s+4} = 2s-6$;

б) $(n-1)\sqrt{\frac{n-2}{n^2-1}} = 0$; г) $\sqrt{(z-1)^2(z-5)} = |z-1|\sqrt{25-z^2}$.

664. Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{a^2+14a-16} = -4$; в) $2\sqrt{g+18} + \sqrt{4g-3} = 15$;

б) $\sqrt[4]{6-c^2} = c$; г) $\sqrt{k+13} + \sqrt{k+28} = 2,5\sqrt{k}$.

665. Решите уравнение:

а) $\sqrt{g+5} + \sqrt{5-g} = 4$;

б) $\sqrt{r+5} + \sqrt{r} = \sqrt{4r+9}$;

в) $\sqrt{6f+1} + \sqrt{4f+2} = \sqrt{8f} + \sqrt{2f+3}$;

г) $\sqrt{8-b} - \sqrt{9+5b} - \sqrt{4-5b} + \sqrt{5+b} = 0$.

666. Решите уравнение:

- а) $q^2 - 4q - 6 = \sqrt{2q^2 - 8q + 12}$;
 б) $\sqrt{w^2 - 3w + 5} + w^2 = 3w + 7$;
 в) $\sqrt{y^2 - 3y + 3} + \sqrt{y^2 - 3y + 6} = 3$;
 г) $\sqrt{r^2 - r - 1} + \sqrt{r^2 + r + 3} = \sqrt{2r^2 + 8}$;
 д) $\sqrt{t^2 + t - 2} + \sqrt{t^2 + 2t - 3} = \sqrt{t^2 - 3t + 2}$;
 е) $\sqrt{e^2 - 4e + 3} + \sqrt{-e^2 + 3e - 2} = \sqrt{e^2 - e}$.

667. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{a-1} + \sqrt{2-a} = 3$;
 б) $\sqrt{s+1} - \sqrt{9-s} = \sqrt{2s-12}$;
 в) $\sqrt{2d+5} + \sqrt{5d+6} = \sqrt{12d+25}$;
 г) $\sqrt{f} - \sqrt{f+1} + \sqrt{f+9} - \sqrt{f+4} = 0$;
 д) $(1+g^2)\sqrt{1+g^2} = g^2 - 1$;
 е) $\sqrt{h^2+1} + \sqrt{h^2-8} = 3$.

668. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{p^2+p+4} + \sqrt{p^2+p+1} = \sqrt{2p^2+2p+9}$;
 б) $\sqrt{l^2+l+7} + \sqrt{l^2+l+2} = \sqrt{3l^2+3l+19}$;
 в) $\sqrt{i+2\sqrt{i-1}} + \sqrt{i-2\sqrt{i-1}} = i-1$;
 г) $\sqrt{5-\sqrt{k+1}} + \sqrt{2k^2+k+3} = 1$;
 д) $\sqrt{m+8} + 2\sqrt{m+7} + \sqrt{m+1} - \sqrt{m+7} = 4$.

669. Решите уравнение:

- а) $\frac{(p^2-4)(p-4)}{\sqrt{p^2-7p-8}} = 0$; в) $\sqrt{k-9} + \sqrt{k} = \frac{36}{\sqrt{k-9}}$;
 б) $\sqrt{4l-3} = \frac{3l-1}{\sqrt{3l-5}}$; г) $\frac{\sqrt{m+7}}{\sqrt{m+2}} = \frac{3\sqrt{m-1}}{\sqrt{3m-2}}$.

670. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{f^2-2f-3} = f+1$; в) $\sqrt{7+\sqrt[3]{v^2+7}} = 3$;
 б) $\frac{1}{q+\sqrt{1+q^2}} + \frac{1}{q-\sqrt{1+q^2}} = -2$; г) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{p}}}{2-p} = \frac{2}{\sqrt{2-p}}$.

671. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{\frac{12-2e}{e-1}} + \sqrt[3]{\frac{e-1}{12-2e}} = \frac{5}{2}$; в) $\sqrt[5]{\frac{16k}{k-1}} + \sqrt[5]{\frac{k-1}{16k}} = \frac{5}{2}$;
 б) $\sqrt[7]{\frac{5-f}{f+3}} + \sqrt[7]{\frac{f+3}{5-f}} = 2$; г) $\frac{\sqrt[3]{g-1}}{\sqrt[3]{g^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{g^2-1}}{\sqrt[3]{g-1}} = 12$.

672. Решите уравнение:

- а) $\frac{\sqrt{21+c} + \sqrt{21-c}}{\sqrt{21+c} - \sqrt{21-c}} = \frac{21}{c}$; в) $\frac{u+3}{\sqrt{u-1}} = \sqrt{3u+1}$;
 б) $\sqrt{5q+2} + \sqrt{5q-2} = \frac{12q}{\sqrt{5q+2}}$; г) $\frac{v-2}{\sqrt{2v-7}} = \sqrt{v-4}$.

673. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{5+\sqrt{y^2+5}} = 2$;
 б) $\sqrt[3]{25+\sqrt{h^2+3}} = 3$;
 в) $\sqrt{3b+1} + \sqrt{16-3b} = 5$;
 г) $\sqrt{5t+1} - \sqrt{6t-2} - \sqrt{t+6} + \sqrt{2t+3} = 0$;
 д) $\sqrt{4g(g+1)+1} + \sqrt{4g(g-1)+1} = 2$;
 е) $\sqrt{v^2+2v+1} - \sqrt{v^2-4v+4} = 3$.

674. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{q+7} + \sqrt[3]{28-q} = 5$;
 б) $\sqrt[3]{9-\sqrt{s+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{s+1}} = 4$;
 в) $\sqrt[3]{z+1} + \sqrt[3]{z+2} + \sqrt[3]{z+3} = 0$;
 г) $\sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{a^2+18} = 5$;
 д) $\sqrt{g} + \sqrt[3]{g-1} = 1$;
 е) $\sqrt[3]{2-b} = 1 - \sqrt{b-1}$.

675. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{76+\sqrt{l}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{l}} = 8$;
 б) $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{k}}} - \sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{k}}} = 0$;

- в) $j \sqrt[3]{35-j^3} (j + \sqrt[3]{35-j^3}) = 30$;
 г) $\sqrt[4]{h-2} + \sqrt[4]{6-h} = \sqrt{2}$;
 д) $\sqrt[4]{77+g} + \sqrt[4]{20-g} = 5$;
 е) $\sqrt[4]{97-f} + \sqrt[4]{f} = 5$;
 ж) $\sqrt[5]{33-d} + \sqrt[5]{d} = 3$;
 з) $\sqrt[5]{(s-2)(s-32)} - \sqrt[5]{(s-1)(s-33)} = 1$.

676. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{6-z} + \sqrt{z-2} + 2\sqrt[4]{(6-z)(z-2)} = 2$;
 б) $c\sqrt{c^2+15} - \sqrt{c}\sqrt[4]{c^2+15} = 2$;
 в) $\sqrt[3]{2v(4v^2+3)} - 1 - 12v^2 + v = v^2 - 11$;
 г) $\sqrt[3]{b+24} + \sqrt{12-b} = 6$;
 д) $\sqrt{n^3-n^2-3} + \sqrt{n^3-n^2+4} = 3$;
 е) $m + \sqrt{17-m^2} + m\sqrt{17-m^2} = 9$.

677. Решите уравнение:

- а) $\frac{h+1}{2h-3} + \frac{h-3}{3h-2} = 2\sqrt{\frac{h^2-2h-3}{6h^2-13h+6}}$;
 б) $\frac{2+q}{\sqrt{2}+\sqrt{2+q}} - \frac{2-q}{\sqrt{2}-\sqrt{2+q}} = 2\sqrt{2}$;
 в) $\sqrt{12-\frac{12}{p^2}} + \sqrt{p^2-\frac{12}{p^2}} = p^2$;
 г) $\sqrt[3]{(t+1)^2} + 2\sqrt[3]{(t-1)^2} = 3\sqrt[3]{t^2-1}$.

678. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{5b+7} - \sqrt[3]{5b-12} = 1$;
 б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{v}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{v}} = 2$;
 в) $w^{10} - w^5 - 2\sqrt{w^5} + 2 = 0$;
 г) $\sqrt{c^5\sqrt{c}} - \sqrt[5]{c\sqrt{c}} = 56$.

679. Решите уравнение:

- а) $\frac{\sqrt[4]{18-t} + \sqrt[4]{t-1}}{\sqrt[4]{18-t} - \sqrt[4]{t-1}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{18-t}{t-1}}$;
 б) $\frac{(5-i)\sqrt{5-i} + (i-3)\sqrt{i-3}}{\sqrt{5-i} + \sqrt{i-3}} = 2$;
 в) $\sqrt[5]{m^{-2}} + (m^{-0,8} - 1)^2 - \sqrt[5]{m^{-3}} = 0$;
 г) $\sqrt{(a-1)^2(a-5)} = |a-1|\sqrt{25-a^2}$.

680. Решите неравенство:

- а) $|l+5| > 11$; в) $|3j-1| \geq 5$; д) $|5g^2-2g+1| < 1$;
 б) $|2k-5| < 3$; г) $|2h-4| \leq 1$; е) $|6f^2-2f+1| \leq 1$.

681. Решите неравенство:

- а) $|n| + |n-1| < 5$;
 б) $|b+1| + |b-2| > 5$;
 в) $|2m+1| - |5m-2| \geq 1$;
 г) $|c-1| + |2-c| > 3+c$;
 д) $|1-3z| - |2z+3| \geq 0$;
 е) $|3v-1| + |2v-3| - |v+5| < 2$.

682. Решите неравенство:

- а) $|2q-1| < |4q+1|$; г) $|r^2+r+10| \leq 3r^2+7r+2$;
 б) $|w-6| > |w^2-5w+9|$; д) $|2t^2+t+11| > t^2-5t+6$;
 в) $|e^2-3e-15| < 2e^2-e$; е) $|4y^2-9y+6| > -y^2+y-3$.

683. Из Гродно в Барановичи (рис. 280) отправляется один поезд, а через 3 ч — второй поезд, который проходит за час на 18 км больше и прибывает в Барановичи на 2 ч позже. Найдите скорости поездов.

684. В одном растворе 200 г соли, во втором — 330 г. Найдите концентрации растворов, учитывая, что масса другого из них на 200 г больше, а его концентрация на 5 % больше.



Рис. 280



Рис. 281

685. Есть два цилиндра (рис. 281) объемами $1200\pi \text{ см}^3$ и $1690\pi \text{ см}^3$. Найдите высоты h_1 и h_2 цилиндров, учитывая, что высота h_2 второго из них на 2 см меньше, площадь S_2 основания — на $69\pi \text{ см}^2$ больше, а объемом цилиндра V находится по формуле $V = Sh$.

* * *

686. Докажите, что сумма всех попарных произведений сторон четырехугольника не меньше увеличенной в 6 раз его площади.

687. Прямоугольную пластинку, разделенную на равные квадраты, замостили прямоугольными плитками из трех квадратов. Можно ли замостить эту пластинку, если одну плитку заменить «уголком» из трех квадратов?

688. В треугольнике ABC проведена медиана CM , а в треугольниках ACM и BCM — биссектрисы MP и MQ ; K — точка пересечения отрезков CM и PQ . Докажите, что $PQ = 2 MK$.

17*. Иррациональные неравенства

Иррациональным неравенством называется неравенство, которое содержит действие извлечения корня из выражения с переменной или действие возведения в дробную степень выражения с переменной.

При решении иррациональных неравенств используют те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений. Вместе с этим есть и принципиальное отличие, вызванное тем, что проверка подстановкой найденного множества чисел обычно невозможна из-за его бесконечности. Это требует при решении неравенств следить за равносильностью проводимых преобразований.

Рассмотрим иррациональные неравенства с квадратными корнями, сводимые к неравенствам одного из видов $\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Теорема 15. Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть число a — решение неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$. Тогда истинно числовое неравенство $\sqrt{f(a)} < g(a)$. Значит, числовое выражение $\sqrt{f(a)}$ имеет значение, и поэтому $f(a) \geq 0$. Значение выражения $\sqrt{f(a)}$ неотрицательно, т. е. $\sqrt{f(a)} \geq 0$, а поскольку $g(a) > \sqrt{f(a)}$, то $g(a) > 0$. Возведя истинное числовое равенство $\sqrt{f(a)} < g(a)$ с неотрицательными частями в квадрат, получим также истинное числовое равенство $f(a) < g^2(a)$. Истинность всех трех неравенств $f(a) \geq 0$, $g(a) > 0$ и $f(a) < g^2(a)$ позволяет утверждать, что число a является ре-

шением системы
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Пусть число b — решение системы
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

истинна система числовых неравенств
$$\begin{cases} f(b) \geq 0, \\ g(b) > 0, \\ f(b) < g^2(b), \end{cases} \quad \text{а зна-}$$

чит, и каждое из этих неравенств. Поскольку неравенства $f(b) \geq 0$ и $g(b) > 0$ истинны, то, извлекая квадратный корень из истинного числового неравенства $f(b) < g^2(b)$, получим истинное числовое неравенство $\sqrt{f(b)} < g(b)$. А это означает, что число b является решением неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Так же доказывается, что **неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств**

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решим неравенство $\sqrt{2(a+7)} \leq a-5$.

Будем последовательно получать:

$$\begin{aligned} \sqrt{2(a+7)} \leq a-5 &\equiv \begin{cases} 2(a+7) \geq 0, \\ a-5 \geq 0, \\ 2a+14 < (a-5)^2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} a \geq -7, \\ a \geq 5, \\ 2a+14 < a^2-10a+25 \end{cases} \equiv \begin{cases} a \geq 5, \\ a^2-12a+11 > 0 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} a \geq 5, \\ a < 1, \\ a > 11 \end{cases} \equiv \begin{cases} a > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 16. Неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно сово-

купности систем неравенств
$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть число a — решение неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Тогда истинно числовое неравенство $\sqrt{f(a)} > g(a)$. Значит, числовое выражение $\sqrt{f(a)}$ имеет значение, и поэтому $f(a) \geq 0$.

Пусть $g(a) < 0$. Тогда, учитывая, что $f(a) \geq 0$, можно утверждать, что a — решение системы
$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $g(a) \geq 0$. Поскольку еще $f(a) \geq 0$, то числовые неравенства $\sqrt{f(a)} > g(a)$ и $f(a) > g^2(a)$ с неотрицательными компонентами истинны одновременно. Получили, что в этом случае

a — решение системы
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Таким образом, каждое решение неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$ удовлетворяет системе
$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$
 или системе
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x), \end{cases}$$

т. е. является решением совокупности
$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Пусть число b — решение совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Если истинна система числовых неравенств
$$\begin{cases} g(b) < 0, \\ f(b) \geq 0, \end{cases}$$
 то истинно и неравенство $\sqrt{f(b)} \geq 0$ и $\sqrt{f(b)} > g(b)$, т. е. число b — решение неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Если истинна система числовых неравенств
$$\begin{cases} g(b) \geq 0, \\ f(b) > g^2(b), \end{cases}$$
 то истинно и неравенство $\sqrt{f(b)} > g(b)$. Получили, что и в этом случае число b — решение неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Так же доказывается, что неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ рав-

носильно совокупности систем неравенств
$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример 2. Решим неравенство $\sqrt{c^2-7c-8} > 2c+2$.

Данное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} 2c+2 \geq 0, \\ c^2-7c-8 > (2c+2)^2; \\ 2c+2 < 0, \\ c^2-7c-8 \geq 0. \end{cases}$$

Первую систему совокупности можно заменить равносильной системой
$$\begin{cases} c+1 \geq 0, \\ (c+1)(-3c-12) > 0, \end{cases}$$
 которая не имеет решений.

Вторая система совокупности равносильна системе $\begin{cases} c + 1 < 0, \\ (c + 1)(c - 8) \geq 0 \end{cases}$. Первое неравенство дает неравенство $c < -1$, а второе, с учетом первого, записывается как $c - 8 \leq 0$, или как $c \leq 8$.

Общие решения неравенств $c < -1$ и $c \leq 8$ составляют множество $(-\infty; -1)$.

Ответ. $(-\infty; -1)$.

Пример 3. Решим неравенство $g^2 + g - 6 > 2\sqrt{g^2 + g + 18}$.

Обратим внимание на то, что выражение $g^2 + g - 6$ и подкоренное выражение $g^2 + g + 18$ имеют одинаковую структуру, что позволяет получить более простое неравенство, введя новую переменную.

Обозначим h выражение $\sqrt{g^2 + g + 18}$. Тогда $h^2 = g^2 + g + 18$ и $g^2 + g - 6 = h^2 - 24$. В результате данное неравенство принимает вид

$$h^2 - 24 > 2h.$$

Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} h^2 - 24 &> 2h; \\ h^2 - 2h - 24 &> 0; \\ h < -4 \text{ или } h &> 6. \end{aligned}$$

Вернувшись к исходной переменной, получим совокупность неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{g^2 + g + 18} < -4, \\ \sqrt{g^2 + g + 18} > 6. \end{cases}$$

Первое неравенство этой совокупности не имеет решений, второе — равносильно системе $\begin{cases} g^2 + g + 18 \geq 0, \\ g^2 + g + 18 > 36, \end{cases}$ в которой первое неравенство является следствием второго. Решим второе неравенство:

$$\begin{aligned} g^2 + g - 18 &> 0; \\ g < \frac{-1 - \sqrt{73}}{2} \text{ или } g &> \frac{-1 + \sqrt{73}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{73}}{2}) \cup (\frac{-1 + \sqrt{73}}{2}; +\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство $\sqrt{4t - 1} - \sqrt{2t + 2} < 1$.

Если это неравенство заменим равносильным неравенством $\sqrt{4t - 1} < 1 + \sqrt{2t + 2}$, в котором левая и правая части неотрицательны, то получим возможность возведением их в квадрат прийти к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} 4t - 1 \geq 0, \\ 2t + 2 \geq 0, \\ 4t - 1 < 1 + 2t + 2 + 2\sqrt{2t + 2}. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq \frac{1}{4}, \\ 2\sqrt{2t + 2} > 2t - 4 \end{cases} &\equiv \begin{cases} t \geq \frac{1}{4}, \\ \sqrt{2t + 2} > t - 2 \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} t \geq \frac{1}{4}, \\ t - 2 \geq 0, \\ 2t + 2 > t^2 - 4t + 4; \end{cases} \equiv \begin{cases} t \geq 2, \\ t^2 - 6t + 2 < 0; \end{cases} \equiv \\ &\equiv \begin{cases} t \geq \frac{1}{4}, \\ t - 2 < 0, \\ 2t + 2 \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} t \geq 2, \\ 3 - \sqrt{7} < t < 3 + \sqrt{7}, \\ \frac{1}{4} \leq t < 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} 2 \leq t < 3 + \sqrt{7}; \\ \frac{1}{4} \leq t < 2 \end{cases} \equiv \frac{1}{4} \leq t < 3 + \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Ответ. $[\frac{1}{4}; 3 + \sqrt{7})$.



1. Какое неравенство называется иррациональным?
2. Какие неравенства называют равносильными?
3. Какие неравенство и систему неравенств называют равносильными?
4. Какие неравенство и совокупность неравенств называют равносильными?
5. Какой системе неравенств равносильно неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$; неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$?
6. Какой системе неравенств равносильно неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$; неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$?
7. Какие приемы используют при решении иррациональных неравенств?

689. Решите неравенство:

- а) $-5 \leq \sqrt{a-3}$; г) $\sqrt{2h+1} > -8$;
 б) $-1 < \sqrt{s^2+1}$; д) $-\frac{1}{4} \geq \sqrt{c^2-5c+6}$;
 в) $-3 > \sqrt{z+5}$; е) $1 > \sqrt{-n^2-3n-10}$.

690. Решите неравенство:

- а) $(h+1)\sqrt{h+4}\sqrt{h+7} \leq 0$; г) $q\sqrt{\frac{q+5}{q+6}} < 0$;
 б) $(j+1)\sqrt{(j+4)(j+7)} \leq 0$; д) $(d-1)\sqrt{d^2-d-2} \geq 0$;
 в) $z\sqrt{\frac{z+5}{z+6}} < 0$; е) $(c^2-1)\sqrt{c^2-c-2} \geq 0$.

691. Решите неравенство:

- а) $\frac{\sqrt{b+20}}{b-1} < 0$; г) $(k+3)\sqrt{\frac{6-k}{8-k}} \geq 0$;
 б) $|l|\sqrt{l-3} \leq 0$; * д) $(2+v)\sqrt{(4-v)(5-v)} \geq 0$;
 в) $\frac{\sqrt{2z^2+15z-17}}{10-z} \geq 0$; е) $\frac{1-\sqrt{21-4c-c^2}}{c+1} \geq 0$.

692. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{p^2-3p+2} \geq 0$; е) $\sqrt{e-1-e^2} > 0$;
 б) $\sqrt{4i^2+4i+1} > 0$; ж) $\sqrt{5t-6-t^2} \leq 0$;
 в) $\sqrt{u^2+u+1} > 0$; з) $\sqrt{5x-18-x^2} > 0$;
 г) $\sqrt{5y-6-y^2} > 0$; и) $\sqrt{39+88a-7a^2} > 0$.
 д) $\sqrt{-4r^2-12r-9} \geq 0$;

693. Решите неравенство:

- а) $(l-1)\sqrt{l^2-l-6} \geq 0$; в) $\frac{\sqrt{d^2-d-2}}{d^2+2d-3} > 0$;
 б) $(3-k)\sqrt{k^2+k-2} \leq 0$; г) $\frac{f-7}{\sqrt{4f^2-19f+12}} < 0$.

694. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq 2$; в) $\sqrt{q^2-q-2} + \frac{1}{\sqrt{q^2-q-2}} > \frac{5}{2}$;
 б) $\sqrt{1-b} + \frac{1}{\sqrt{1-b}} \geq 2$; г) $\sqrt{n^2-5n+6} + \frac{1}{\sqrt{n^2-5n+6}} \geq \frac{5}{2}$.

695. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{(3k-2)^2} \leq 1$; е) $\frac{\sqrt{(s-1)^2}}{s-1} \geq 1$;
 б) $\sqrt{m^2} \geq 8$; ж) $\frac{\sqrt{a^2}}{a} \geq 1$;
 в) $\sqrt{\left(\frac{p+1}{3-2p}\right)^2} > 1$; з) $\sqrt{h^2} > h^2-h-3$;
 г) $\sqrt{n^2} < n+1$; и) $\sqrt{y^4-2y^2+1} > 1-y$.
 д) $\sqrt{z^2+4z+4} < z+6$;

696. Решите неравенство:

- а) $a + \sqrt{a+1} < 1$; в) $\sqrt{4-\sqrt{1-q}} - \sqrt{2-q} > 0$;
 б) $e + \sqrt{3-2e} + 1 > 0$; г) $\sqrt{2-\sqrt{3+c}} - \sqrt{c+4} < 0$.

697. Решите неравенство:

- а) $2\sqrt{g-1} < g$; в) $\sqrt{2q+4} > q+3$; д) $z \geq \sqrt{2-z}$;
 б) $y > \sqrt{24-5y}$; г) $u < \sqrt{2-u}$; е) $\sqrt{2d-1} < d$.

698. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{n+7} < n$; в) $\sqrt{x+7} \geq x$; д) $\sqrt{n+2} \geq n$;
 б) $c+1 > \sqrt{2+c}$; г) $\sqrt{k+3} > k-9$; е) $\sqrt{r} > r-1$.

699. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{d+14} < d+2$; г) $v < \sqrt{24-5v}$;
 б) $\sqrt{e+78} > e+6$; д) $\sqrt{|1-2e|} \geq 1+e$;
 в) $\sqrt{9c-20} < c$; е) $\sqrt{|y-0,25|} \geq y+0,5$.

700. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{3p-p^2} < 4-p$; г) $\sqrt{5-k^2} > k-1$;
 б) $\sqrt{l^2+1} > l-1$; д) $4-m < \sqrt{m^2-2m}$;
 в) $1-i < \sqrt{i^2-2i}$; е) $4-u < \sqrt{2u-u^2}$.

701. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{(q-6)(1-q)} < 3+2q$; г) $\sqrt{2r^2-3r-5} < r-1$;
 б) $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6-x$; д) $\sqrt{t^2+3t+3} < 2t+1$;
 в) $\sqrt{(e+3)(e-8)} > e+2$; е) $\sqrt{y^2-3y-10} < 8-y$.

702. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{a^2 + a - 2} > a$; г) $\sqrt{(s+2)(s-5)} \geq 8 - s$;
 б) $\sqrt{d^2 - 5d - 24} \leq d + 2$; д) $\sqrt{f^2 - 3f - 18} < 4 - f$;
 в) $\sqrt{b^2 - 2b} \leq 4 - b$; е) $\sqrt{m^2 + m - 1} < m - 1$.

703. Решите неравенство:

- а) $a - 3 < \sqrt{a^2 + 4a - 5}$; г) $\sqrt{8 + 2f - f^2} > 6 - 3f$;
 б) $2s + 3 < \sqrt{s^2 + 5s + 6}$; д) $2g + 3 < \sqrt{-2 - 3g - g^2}$;
 в) $\sqrt{d^2 - 3d + 2} > 2d - 5$; е) $h + 4 < \sqrt{-h^2 - 8h - 12}$.

704. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{2a^2 - 3a - 5} < a - 1$; г) $\sqrt{(m-3)(2-m)} < 3 + 2m$;
 б) $\sqrt{z^2 + 3z + 3} \geq 2z + 1$; д) $\sqrt{\frac{4}{j^2} - \frac{3}{4}} < \frac{2}{j} - \frac{1}{2}$;
 в) $2j - 3 < 2\sqrt{j^2 - 9}$; е) $\sqrt{\frac{6}{m^2} - \frac{5}{6}} \geq \frac{7}{m} - \frac{1}{7}$.

705. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{b^2 - b + 1} \geq b^2 - b - 1$; г) $(1+t)\sqrt{t^2 + 1} > t^2 - 1$;
 б) $\sqrt{b^2 + b + 1} > 1 - b - b^2$; д) $\sqrt{z^3 + 3z + 4} \leq 2z + 2$;
 в) $s^2 - 2s + 3 < \sqrt{4 - s^2}$; е) $\sqrt{c^3 - 4c + 3} > c - 1$.

706. Решите неравенство:

- а) $\frac{\sqrt{4-c}}{c+3} < 2$; в) $\frac{1-3\sqrt{16-u^2}}{u} \leq 1$; д) $\frac{2l^2}{1-\sqrt{1-l^2}} \leq 3$;
 б) $\frac{\sqrt{3p^2+4}}{p-1} \geq 4$; г) $\frac{1-\sqrt{5b+6}}{2b} < 2$; е) $\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{y} > \frac{3}{2}$.

707. Решите неравенство:

- а) $\frac{\sqrt{8-2y-y^2}}{y+10} \leq \frac{\sqrt{8-2y-y^2}}{2y+9}$; г) $\frac{9k^2-4}{\sqrt{5k^2-1}} \leq 3k-2$;
 б) $\frac{\sqrt{12-l-l^2}}{2l-7} \leq \frac{\sqrt{12-l-l^2}}{l-5}$; д) $\frac{1}{\sqrt{1+m}} > \frac{1}{2-m}$;
 в) $\frac{i^2-1}{\sqrt{13-i^2}} \geq i-1$; е) $\frac{3\sqrt{1-2s-4}}{5+2\sqrt{1-2s}} > 0$.

708. Решите неравенство:

- а) $\frac{\sqrt{m+4}}{1-m} - 1 < 0$; в) $\frac{1-\sqrt{1-4b^2}}{b} < 3$;
 б) $\frac{\sqrt{2n-1}}{n-2} < 1$; г) $\frac{\sqrt{2x^2+7x-4}}{x+4} < \frac{1}{2}$.

709. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{j+3} + \sqrt{j+15} < 6$; г) $2 - \sqrt{1-u^2} > \sqrt{4-u^2}$;
 б) $\sqrt{1-p^2} + 1 < \sqrt{3-p^2}$; д) $3\sqrt{l} - \sqrt{l+3} > 1$;
 в) $\sqrt{r-6} - \sqrt{10-r} \geq 1$; е) $\sqrt{1-3e} - \sqrt{5+e} > 1$.

710. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{1-d} - \sqrt{d} > \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{25-a^2} + \sqrt{a^2+7a} > 3$;
 б) $\sqrt{1+c} + \sqrt{1-c} > 1$; г) $\sqrt{r^2+3r+2} - \sqrt{r^2-r+1} < 1$.

711. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{h+3} + \sqrt{h+2} - \sqrt{2h+4} > 0$;
 б) $\sqrt{t+3} < \sqrt{t-1} + \sqrt{t-2}$;
 в) $\sqrt{7y-13} - \sqrt{3y-19} > \sqrt{5y-27}$;
 г) $\sqrt{y+3} - \sqrt{y-1} > \sqrt{2y-1}$;
 д) $\sqrt{t-2} + \sqrt{t-5} \leq \sqrt{t-3}$;
 е) $\sqrt{5+r} + \sqrt{-r-3} \geq 1 + \sqrt{(r+5)(-r-3)}$.

712. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{m+6} > \sqrt{m+1} + \sqrt{2m-5}$;
 б) $\frac{(9-l)\sqrt{9-l} + (4+l)\sqrt{4+l}}{(9-l)\sqrt{4+l} + (4+l)\sqrt{9-l}} < \frac{7}{6}$;
 в) $\sqrt{2b-5} + \sqrt{3b-2} < \sqrt{4b-3} + \sqrt{b-4}$;
 г) $(12-k)\sqrt{\frac{12-k}{k-2}} + (k-2)\sqrt{\frac{k-2}{12-k}} < \frac{82}{3}$.

713. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{1-d} \leq \sqrt[4]{5-d}$; д) $\sqrt{c-9}\sqrt[4]{c} + 18 \geq 0$;
 б) $\sqrt[4]{5g-1} \leq \sqrt{g}\sqrt[4]{6}$; е) $\sqrt[4]{15+d} - \sqrt[4]{2-d} > 1$;
 в) $\sqrt{4-4q^3+q^6} > q - \sqrt[3]{2}$; ж) $\frac{\sqrt{k^3-8}}{2} > k-2$;
 г) $(b-3)\sqrt{b^2+3} \leq b^2+4$; з) $(y-2)\sqrt{y^2+1} > y^2+2$.

714. В равнобедренный треугольник, основание и боковая сторона которого соответственно равны a и b , вписана окружность, и затем проведена ее хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами треугольника. Найдите длину l этой хорды и сравните ее с:

- отрезком, соединяющим середины боковых сторон треугольника;
- радиусом вписанной окружности.

715. Найдите радиус r окружности, вписанной в треугольник, учитывая, что:



Рис. 282

- две его стороны и угол между ними соответственно равны a , b , α ;
- его сторона и прилежащие к ней углы соответственно равны a , α , β .

716. Окружность с радиусом r , вписанная в треугольник, точками касания разделяется на дуги, градусные меры которых равны α , β , γ . Найдите стороны треугольника.

717. В треугольник со сторонами a , b , c вписана окружность. Найдите градусные меры дуг, на которые разделяется окружность точками касания.

718. Внутренняя точка равностороннего треугольника со стороной m отстоит от двух его вершин на a и на b . Найдите расстояние этой точки от центроида треугольника.

719. Нью-Йорк, Лос-Анджелес, Чикаго, Хьюстон — наибольшие города США (рис. 282). Если бы количество жителей Нью-Йорка было на 2 тыс. чел. меньше, а количество жителей Лос-Анджелеса было на 1 тыс. чел. больше, то числа, выражающие количество жителей этих городов, Чикаго и Хьюстона, относились бы как $893 : 426 : 325 : 227$. Найдите количество жителей этих городов США, учитывая, что в Нью-Йорке живет на 2163 тыс. чел. больше, чем в Хьюстоне и Лос-Анджелесе вместе.

720. Великие Озера — группа озер на территории США и Канады — крупнейшее в Западном полушарии скопление пресной воды (рис. 283). Площади озер Верхнего, Мичиган и Гурон относятся соответственно как $206 : 145 : 149$, а увеличенная на 3 тыс. км² площадь озера Эри относится к площади озера Онтарио как $4 : 3$. Найдите:

- площади этих озер, учитывая, что площадь Эри относится к увеличенной на 0,1 тыс. км² площади Верхнего озера как $13 : 55$ и больше площади Онтарио на 6,2 тыс. км²;
- высоту прямоугольного параллелепипеда с площадью, равной суммарной площади Великих Озер, и объемом, равным объему воды в этих озерах, который составляет 22,7 тыс. км³.



Рис. 283

721. Можно ли выбрать такую точку M выпуклого пятиугольника $ABCDE$, что каждая из прямых MA , MB , MC , MD и ME отсекает от него треугольник?

722. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а биссектрисы его углов C и D — в точке N . Докажите, что если точки M и N различны и $MN \perp AB$, то углы A и B равны.

723. Многочлен с целыми коэффициентами и свободным членом 2007 имеет числа 1 и 8 своими корнями. Докажите, что ни при каком целом значении переменной значение многочлена не может быть равным 2008.

Раздел V



ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК И ОКРУЖНОСТЬ

18. Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны друг другу и все углы равны друг другу.

Правильным треугольником является равносторонний треугольник (рис. 284), *правильным четырехугольником* — квадрат (рис. 285). На рисунках 286 изображен *правильный пятиугольник*, на рисунке 287 — *правильный шестиугольник*.

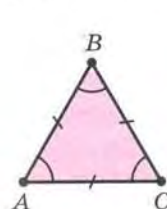


Рис. 284

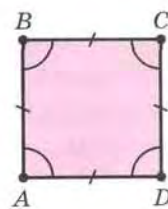


Рис. 285

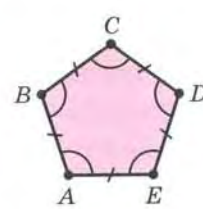


Рис. 286

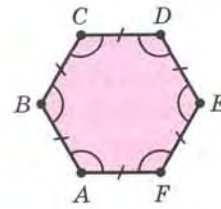


Рис. 287

Вы знаете, что любой треугольник имеет описанную и вписанную окружности, центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров, а центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис (рис. 288). Для правильного треугольни-

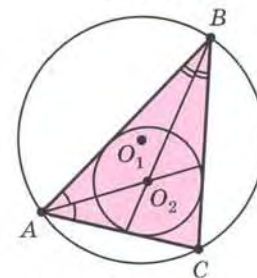


Рис. 288

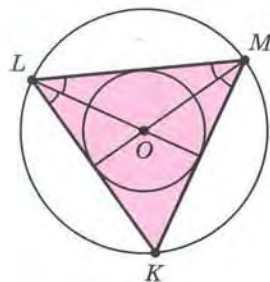


Рис. 289

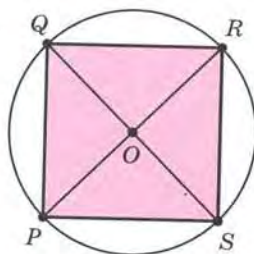


Рис. 290

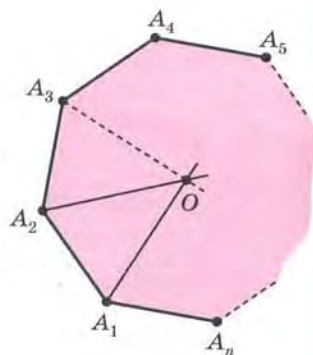


Рис. 291

ка (рис. 289) центры этих окружностей совпадают друг с другом и с точкой пересечения биссектрис. Это свойство имеет и правильный четырехугольник (рис. 290).

Теорема 1. *Любой правильный многоугольник имеет описанную и вписанную окружности, центры которых совпадают друг с другом и с точкой пересечения биссектрис углов многоугольника.*

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ — правильный многоугольник (рис. 291).

Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2 , пусть они пересекаются в точке O . Треугольник OA_1A_2 равнобедренный, так как его углы OA_1A_2 и OA_2A_1 равны друг другу как половины равных углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$. Значит, $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1OA_2 и A_3OA_2 равны, так как в них сторона OA_2 общая, стороны A_1A_2 и A_3A_2 равны, углы A_1A_2O и A_3A_2O также равны. Поэтому $OA_3 = OA_2$. Так же докажем, что $OA_4 = OA_3$, $OA_5 = OA_4$, ..., $OA_{n-1} = OA_n$. Значит, $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \dots = OA_{n-1} = OA_n$. Это означает, что точка O равноудалена от точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$.

Поскольку треугольники $OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, \dots, OA_{n-1}A_n, OA_nA_1$ все равнобедренные и равны друг другу, то равны и их высоты, проведенные к основаниям. Это означает, что точка O равноудалена от сторон многоугольника, она является центром окружности, вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$.

Точка, которая является центром окружности, вписанной в правильный многоугольник, называется **центром правильного многоугольника**.

Следствие 1. *Вписанная в правильный многоугольник окружность касается сторон этого многоугольника в их серединах.*

Теорема 2. *Зависимость между стороной a_n правильного n -угольника и радиусом R описанной около него окружности выражается формулой*

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Доказательство. Пусть A_1A_2 — сторона правильного n -угольника, а точка O — его центр (рис. 292). Пусть $A_1A_2 = a_n$, $OA_1 = R$. Тогда высота OC равнобедренного треугольника OA_1A_2 является его биссектрисой и медианой. Поскольку $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, то $\angle A_1OC = \frac{180^\circ}{n}$. Поскольку $A_1C = OA_1 \sin A_1OC$, то $a_n = A_1A_2 = 2A_1C = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Следствие 2. *Зависимость между радиусами r и R окружностей, вписанной в правильный n -угольник и описанной около него, выражается формулой*

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Действительно, этим равенством связаны катет OC , равный r , гипотенуза OA_1 , равная R , и прилежащий к катету OC угол в прямоугольном треугольнике A_1OC (см. рис. 292).

Следствие 3. *Если a_3, a_4, a_6 — стороны правильных треугольника, четырехугольника, шестиугольника соответственно, то*

$$a_3 = R\sqrt{3}; a_4 = R\sqrt{2}; a_6 = R.$$

Следствие 4. *Два правильных многоугольника с одинаковым количеством сторон подобны.*

Действительно, один из этих многоугольников можно расположить так, чтобы его центр совпал с центром другого многоугольника, а одна из вершин оказалась на луче, выходящем из центра и про-

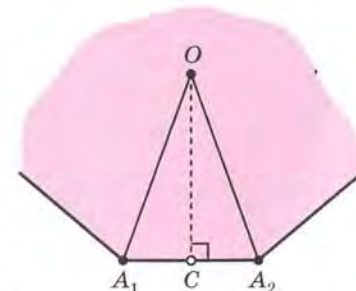


Рис. 292

ходящем через вершину другого многоугольника. Понятно, что после такого перемещения получатся гомотетичные многоугольники.

Следствие 5. *Периметры правильных многоугольников с одинаковым количеством сторон относятся как радиусы описанных около них или как радиусы вписанных в них окружностей.*

Теорема 3. *Зависимость между площадью S многоугольника, его периметром P и радиусом r вписанной в него окружности выражается формулой*

$$S = \frac{1}{2} Pr.$$

Доказательство. Пусть точка O — центр окружности с радиусом r , вписанной в многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ с периметром P (рис. 293). Соединив с центром O вершины этого многоугольника, получим его разбиение на n треугольников $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOA_1$, высоты $OC_1, OC_2, OC_3, \dots, OC_{n-1}, OC_n$ которых, проведенные к сторонам $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, все равны r . Поэтому для площади S многоугольника $A_1A_2A_3A_{n-1} \dots A_n$ получим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot OC_1 + A_2A_3 \cdot OC_2 + A_3A_4 \cdot OC_3 + \dots + \\ &\quad + A_{n-1}A_n \cdot OC_{n-1} + A_nA_1 \cdot OC_n = \\ &= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot r + A_2A_3 \cdot r + A_3A_4 \cdot r + \dots + A_{n-1}A_n \cdot r + A_nA_1 \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1) \cdot r = \frac{1}{2} Pr. \end{aligned}$$

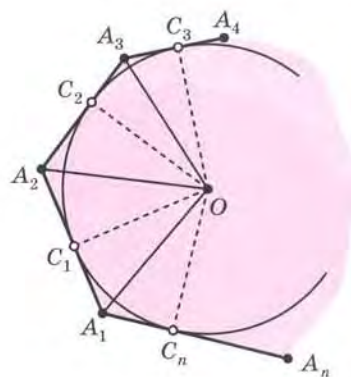


Рис. 293

Следствие 6. *Зависимость между площадью S правильного n -угольника, его стороной a и радиусом r вписанной окружности выражается формулой*

$$S = \frac{1}{2} nar.$$

Вы уже умеете строить правильный треугольник и квадрат. Рассмотрим построение других правильных многоугольников. Для этого обычно ис-

пользуется окружность. Понятно, что для построения правильного n -угольника достаточно разделить окружность на n дуг-долей: точки деления как раз будут вершинами многоугольника. Отсюда следует, что существуют правильные многоугольники с любым количеством сторон.

► С помощью геометрической линейки и циркуля, однако, можно построить не любой правильный многоугольник. Можно, например, построить правильный шестиугольник, учитывая, что в соответствии со следствием 3, его сторона равна радиусу описанной окружности. Поэтому если от произвольно выбранной точки окружности последовательно строить хорды, равные радиусу, то концевые точки этих хорд дадут вершины шестиугольника (рис. 294).

Когда построен правильный n -угольник, то, разделив дуги описанной окружности, стягиваемые сторонами-хордами, пополам, получим еще n точек, которые вместе с вершинами n -угольника дают вершины правильного $2n$ -угольника. На рисунке 295 показано построение правильного восьмиугольника с учетом того, что уже построен правильный четырехугольник. Применяя указанный способ, можно с помощью линейки и циркуля удвоить количество сторон у построенного правильного многоугольника.

Задача о построении линейкой и циркулем правильных многоугольников имеет интересную историю. В Древней Греции умели строить правильные треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник. А окончательное решение было получено в возрасте 19 лет будущим великим мате-

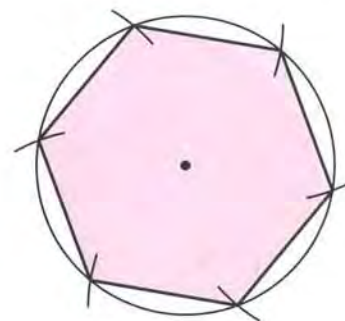


Рис. 294

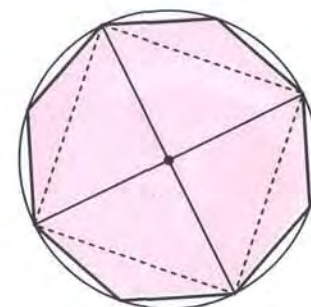


Рис. 295

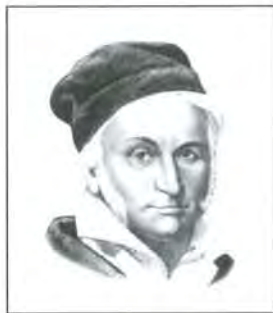


Рис. 296



Рис. 297

матиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855) (рис. 296). Он установил, что циркулем и линейкой можно построить правильный n -угольник только тогда, когда число n можно представить произведением $2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, где m — неотрицательное целое число, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа вида $2^{(2^l)} + 1$, где l — целое неотрицательное число. Отсюда следует, что правильный пятиугольник построить можно, так как $5 = 2^{(2^1)} + 1$, а правильный семиугольник — нельзя. Следующим после пяти простым числом такого вида является число 17, равное $2^{(2^2)} + 1$. Именно задачу о построении правильного семнадцатиугольника решил сначала Гаусс. Это событие он посчитал настолько значимым, что завещал высечь правильный семнадцатиугольник на своем надмогильном памятнике.

Вместе с этим приближенное деление окружности циркулем на произвольное количество долей с любой нужной точностью всегда возможно, что и делают на практике при изготовлении циферблатных часов (рис. 297), компасов (рис. 298), разработке круговых орнаментов (рис. 299). ◀



Рис. 298



Рис. 299

- ?
1. Какой многоугольник называется правильным?
 2. Сформулируйте утверждение о существовании окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него.
 3. Какая точка называется центром правильного многоугольника?
 4. Какой зависимостью связаны сторона правильного n -угольника и радиус описанной около него окружности?
 5. Какой зависимостью связаны радиусы окружностей, описанной около правильного n -угольника и вписанной в него?
 6. Как через радиус описанной окружности выражается сторона правильного треугольника; четырехугольника; шестиугольника?
 7. Сформулируйте утверждение об отношении периметров правильных многоугольников.
 8. Какой зависимостью связаны площадь, периметр многоугольника и радиус вписанной в него окружности?
 9. Какой зависимостью связаны площадь, сторона правильного многоугольника и радиус вписанной в него окружности?
 10. Как построить правильный треугольник; правильный четырехугольник; правильный шестиугольник?

724. Известно, что:

- а) все углы многоугольника равны друг другу. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?
- б) все стороны многоугольника равны друг другу. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?

725. Установите, верно ли утверждение:

- а) любой правильный многоугольник является выпуклым;
- б) любой выпуклый многоугольник является правильным;
- в) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны;
- г) треугольник является правильным, если все его углы равны;
- д) любой равносторонний треугольник является правильным;
- е) любой равносторонний четырехугольник является правильным.

726. Докажите, что любой правильный четырехугольник является квадратом.

727. Докажите, что:

- а) взятые через одну вершины правильного $2n$ -угольника являются вершинами правильного n -угольника;
- б) середины сторон правильного n -угольника являются вершинами другого правильного n -угольника.

728. Докажите, что радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, в два раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

729. Докажите, что хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника.

730. Найдите углы правильного n -угольника, учитывая, что:

- а) $n = 3$; в) $n = 6$; д) $n = 18$;
б) $n = 5$; г) $n = 10$; е) $n = 36$.

731. Установите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, учитывая, что его угол равен:

- а) 60° ; б) 90° ; в) 135° ; г) 150° .

732. Установите, сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, учитывая, что дуга описанной окружности, стягиваемая его стороной, равна:

- а) 60° ; б) 30° ; в) 90° ; г) 36° ; д) 18° ; е) 72° .

733. Докажите, что:

- а) серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника или пересекаются, или совпадают;
б) прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, или пересекаются, или совпадают.

734. Докажите, что для любого многоугольника существует не более одной окружности, описанной около него, и не более одной окружности, вписанной в него.

735. Через сторону a_n правильного n -угольника выразите радиусы окружностей, описанной около него и вписанной в него, если значение n равно:

- а) 3; б) 4; в) 5; г) 6.

736. Начертите окружность и постройте вписанный в нее правильный:

- а) треугольник;
б) четырехугольник;
в) шестиугольник.

737. Начертите окружность и постройте описанный около нее правильный:

- а) треугольник;
б) четырехугольник;
в) шестиугольник.

738. Как правильный шестиугольник разрезать на ромбы?

739. Учитывая, что на рисунке 300 изображен квадрат, вписанный в окружность радиуса R , a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — площадь квадрата, r — радиус вписанной окружности, найдите числа, отсутствующие в таблице.

	R	r	a_4	P	S
а)			12		
б)		6			
в)	12				
г)				56	
д)					48

740. Учитывая, что на рисунке 301 изображен правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R , a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — площадь треугольника, r — радиус вписанной окружности, найдите числа, отсутствующие в таблице.

	R	r	a_3	P	S
а)	9				
б)					40
в)		4			
г)			10		
д)				18	

741. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность, учитывая, что периметр правильного треугольника, вписанного в эту же окружность, равен 18 см.

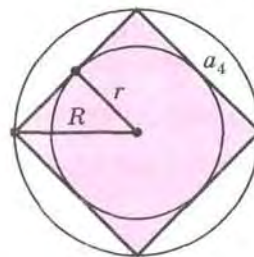


Рис. 300

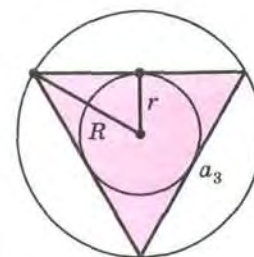


Рис. 301



Рис. 302

742. Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника со стороной 3 см. Установите, каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого можно изготовить вентиль.

743. Расстояния между параллельными гранями шестигранной головки болта (рис. 302), верхнее основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно

1,5 см. Найдите площадь верхнего основания.

744. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из деревянного бруса, поперечное сечение которого является квадратом со стороной 6 см.

745. Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, учитывая, что периметр шестиугольника равен 60 см.

746. Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника через радиус:

а) вписанной окружности; б) описанной окружности.

747. Найдите площадь S правильного n -угольника, учитывая, что:

- а) $n = 4$, $R = 6\sqrt{2}$ см; в) $n = 6$, $r = 18$ дм;
б) $n = 3$, $P = 48$ м; г) $n = 8$, $r = 15\sqrt{3}$ мм.

748. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около нее.

749. С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите:

- а) правильный шестиугольник;
б) правильный треугольник;
в) квадрат;
г) правильный восьмиугольник.

750. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность, учитывая, что сторона правильного треугольника, вписанного в эту окружность, равна a .

751. В окружность с радиусом 4 м вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

752. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник, учитывая, что его сторона равна a , а радиус описанной окружности — R .

753. В окружность с радиусом R вписан правильный многоугольник со стороной a . Найдите сторону b правильного многоугольника с тем же количеством сторон, описанного около этой окружности.

754. Около одного правильного n -угольника описали окружность и вписали в него окружность, радиусы которых оказались равными r_1 и R_1 . Радиус окружности, вписанной в другой правильный n -угольник, равен r_2 . Найдите радиус окружности, описанной около другого n -угольника.

755. Периметры двух правильных n -угольников относятся как $p : q$. Найдите отношение радиусов окружностей:

- а) вписанных в эти n -угольники;
б) описанных около этих n -угольников.

756. Есть правильный шестиугольник. Найдите:

- а) угол между его диагоналями, выходящими из одной вершины;
б) угол между его наименьшими пересекающимися диагоналями;
в) отношение его наибольшей и наименьшей диагоналей;
г) отношение частей большей диагонали, на которые ее делит меньшая диагональ;
д) отношение частей, на которые делят друг друга две меньшие диагонали;
е) отношение площади шестиугольника к площади треугольника, ограниченного меньшими диагоналями.

757. Есть правильный шестиугольник. Докажите, что:

- а) для каждой его диагонали имеется равная ей другая диагональ;
б) среди его диагоналей есть параллельные;
в) среди его диагоналей есть перпендикулярные.

758. Докажите, что в правильном многоугольнике:

- а) диагонали, соединяющие его вершины через одну, равны;
- б) все стороны видны из центра многоугольника под одним углом;
- в) из любой его вершины каждая сторона, кроме тех, которым эта вершина принадлежит, видна под одним и тем же углом;
- г) все треугольники, вершины которых находятся в вершинах данного многоугольника, имеют равные радиусы описанной окружности;
- д) его наибольшая диагональ проходит через центр многоугольника, если количество его сторон четно, и не проходит через этот центр, если количество сторон нечетно.

759. Докажите, что сторона a_n правильного n -угольника, вписанного в окружность с радиусом R , вычисляется по формуле:

а) $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, если $n = 8$;

б) $a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, если $n = 12$.

760. Правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ вписан в окружность с радиусом R . Докажите, что четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R .

761. Установите, является ли описанный многоугольник правильным, если:

- а) все его стороны равны;
- б) все его углы равны.

762. Установите, является ли вписанный многоугольник правильным, если:

- а) все его стороны равны;
- б) все его углы равны.

763. Есть правильный пятиугольник. Установите:

- а) что все его диагонали равны;
- б) что каждая диагональ параллельна какой-либо стороне;
- в) в каком отношении делится каждая диагональ точкой пересечения с другой диагональю;
- г) вид многоугольника, ограниченного всеми диагоналями;
- д) какую часть от площади данного многоугольника составляет площадь многоугольника, ограниченного всеми диагоналями.

764. Найдите область определения функции:

а) $z = \sqrt[7]{b-7}$;

б) $z = \sqrt[8]{(a+2)(a-8)}$;

в) $u = \sqrt[3]{3-d} + \sqrt[6]{7d-7}$.

765. Решите неравенство:

а) $5 - a^2 \geq 0$;

в) $-6c^2 - c + 12 > 0$;

б) $-z^2 + 7 < 0$;

г) $-3x^2 - 6x + 45 < 0$.

766. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} < 0$;

в) $\frac{v^2 + 2v - 3}{v^2 - 2v + 8} > 0$;

б) $\frac{(y-3)(y-5)}{y-2} > 0$;

г) $\frac{u^2 + 5u + 4}{u^2 - 5u - 6} < 0$.

767. Руда содержит примесей 40 %, а выплавленный из нее металл — 4 %. Сколько металла получится из 24 т руды?

768. Есть два слитка, содержащие медь. В первом слитке меди 10 %, во втором — 40 %. После того как их сплавляли вместе, получили слиток, в котором меди 30 %. Установите массу полученного слитка, учитывая, что первый из использованных слитков на 3 кг легче второго.

769. Над выполнением заказа 3,5 дня работала одна бригада, затем она была заменена другой, которая заканчивала выполнение заказа еще 6 дней. Найдите время, за которое каждая бригада выполнила бы заказ, учитывая, что второй бригаде для этого нужно на 5 дней больше.

770. Из Городка в Езерище (рис. 303) выехал велосипедист, который до Дрожаков ехал 1 ч 45 мин, а от Дрожаков до Езерища 48 мин. Найдите время, за которое велосипедист проехал бы весь путь с той и другой скоростью, учитывая, что при езде со скоростью, которая была на первом участке, велосипедист затратил бы на 10 мин меньше.



Рис. 303

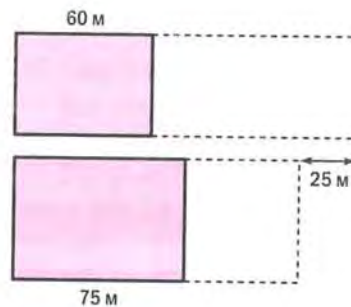


Рис. 304

771. Ширина одного прямоугольного участка равна 60 м, второго — 75 м. Если каждый из участков при прежней высоте нарастить так, чтобы его площадь стала равной общей площади обоих участков, то ширина первого наращенного участка будет на 25 м больше (рис. 304). Найдите ширины наращенных участков.

* * *

772. Найдите множество значений функции $y = \frac{2x-5}{x^2-4x+5}$.

773. Докажите, что число $1 + \sqrt{3}$ нельзя представить суммой квадратов чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа.

774. Докажите, что в записи числа $(6 + \sqrt{37})^{999}$ десятичной дробью первые 999 цифр после запятой — нули.

19. Длина окружности

Длину не очень большого пути между двумя точками, например длину тропинки, можно измерить мерным циркулем (рис. 305). Длину кривой линии, например длину реки по карте, можно измерить циркулем с постоянным небольшим раствором (рис. 306). В этих примерах кривая заменяется ломаной, длина которой дает приближенное значение длины кривой, причем оно находится тем более точно, чем чаще вер-



Рис. 305



Рис. 306

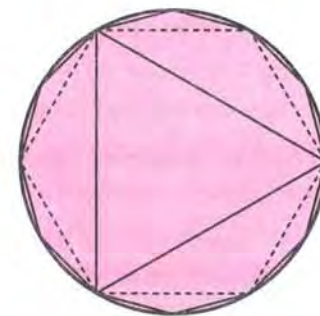


Рис. 307

шины ломаной располагаются на кривой.

Рассмотрим окружность и последовательность вписанных в нее правильных многоугольников с возрастающим количеством сторон (рис. 307). Можно заметить, что с увеличением количества сторон эти многоугольники приближаются к кругу, а их граница-ломаная прижимается к окружности. Для достаточ-но больших значений переменной n граница n -уголь-

ника практически не отличается от окружности, а его периметр приближенно равен длине окружности. Примерно так рассуждали геометры древности. Сделаем это и мы, но сначала докажем формулы, которые позволят найти периметр правильного $2n$ -угольника, если известен периметр правильного n -угольника.

► **Теорема 4.** Если α — угол треугольника, то

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,\end{aligned}$$

и приняв $\beta = \alpha$, получим:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Третью формулу получим с учетом связи между значениями $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Теорема 5. Если P_n — периметр правильного вписанного в окружность n -угольника, Q_n — периметр правильного описанного около этой окружности n -угольника, то

$$P_{2n} = k_n P_n, Q_{2n} = k_n P_{2n}, \text{ где } k_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2nR} \right)^2} \right)}}.$$

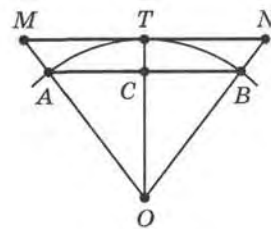


Рис. 308

Доказательство. Пусть O — центр правильного вписанного n -угольника (рис. 308), A и B — его соседние вершины, M и N — соседние вершины правильного описанного n -угольника, T — точка касания стороны MN с вписанной окружностью, C — точка пересечения отрезков AB и OT . Из прямоугольных треугольников AOC и MOT находим:

$$AC = OA \cdot \sin AOC = OA \cdot \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$MT = OT \cdot \operatorname{tg} MOT = OT \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Тогда, учитывая, что отрезки OA и OT равны радиусу R описанной окружности, для сторон a_n и b_n вписанного и описанного n -угольников получим:

$$AB = a_n = 2AC = 2R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$MN = b_n = 2MT = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Это позволяет найти периметры P_n и P_{2n} вписанных n -угольника и $2n$ -угольника, периметры Q_n и Q_{2n} описанных n -угольника и $2n$ -угольника. Получим:

$$P_n = na_n = 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}, P_{2n} = 4nR \sin \frac{90^\circ}{n};$$

$$Q_n = 2nR \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, Q_{2n} = 4nR \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{n}.$$

Выражение $\frac{90^\circ}{n}$ обозначим α . Учитывая, что $\frac{180^\circ}{n} = 2\alpha$, получим:

$$P_n = 2nR \sin 2\alpha; P_{2n} = 4nR \sin \alpha; Q_{2n} = 2nR \operatorname{tg} \alpha.$$

Тогда, с учетом того, что $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, будем иметь:

$$k_n = P_{2n} : P_n = \frac{4nR \sin \alpha}{2nR \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$Q_{2n} : P_{2n} = \frac{4nR \operatorname{tg} \alpha}{4nR \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = k_n.$$

Остается выразить $\cos \alpha$ и k_n . Поскольку $\sin 2\alpha = \frac{P_n}{2nR}$, то

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2nR} \right)^2}.$$

Теперь, используя третье равенство теоремы 4, можем записать:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2nR} \right)^2} \right)} = \frac{1}{k_n}.$$

$$\text{Формулы } P_{2n} = k_n P_n, Q_{2n} = k_n P_{2n}, \text{ где } k_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{2nR} \right)^2} \right)}},$$

называют *формулами удвоения*. Используя их, найдем последовательно значения полупериметров p_n и q_n , один раз начиная с p_4 , второй раз начиная с p_6 . При этом учтем, что $a_4 = R\sqrt{2}$ и $a_6 = R$. Поэтому $p_4 = 2R\sqrt{2}$ и $p_6 = 3R$. Для упрощения вычислений будем рассматривать единичную окружность, у которой $R = 1$. Тогда $p_4 = 2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1,4142 = 2,8284$, $p_6 = 3$.

Для p_8, q_8, p_{12}, q_{12} с использованием формул удвоения будем последовательно получать:

$$p_8 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2,8284}{4} \right)^2} \right)}} \cdot 2,8284 = 3,0614;$$

$$q_8 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2,8284}{4} \right)^2} \right)}} \cdot 3,0614 = 3,3136;$$

$$p_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{6} \right)^2} \right)}} \cdot 3 = 3,1058;$$

$$q_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{3}{6} \right)^2} \right)}} \cdot 3,1058 = 3,2154.$$

В результате дальнейших вычислений получим следующую таблицу.

n	p_n	q_n	n	p_n	q_n
8	3,0614	3,3136	48	3,1393	3,1461
12	3,1058	3,2154	64	3,1403	3,1441
16	3,1214	3,1825	96	3,1410	3,1427
24	3,1326	3,1596	128	3,1412	3,1422
32	3,1365	3,1517	192	3,1414	3,1418

Анализ таблицы показывает, что с ростом значений переменной n значения выражений p_n и q_n сближаются, при этом значения p_n возрастают, значения q_n убывают. Можно заметить, что у соответствующих значений p_n и q_n сначала совпадают цифры целых (при $n = 8$), затем десятых (при $n = 16$), затем сотых (при $n = 64$). Понятно, что дальнейшие вычисления с большей точностью приведут к совпадению цифр в следующих разрядах. Число, которое является результатом описанного процесса, и есть число π .

► Число π — одна из важнейших констант математики и природоведения. Это число является иррациональным. Нужды практических расчетов заставляли уже в глубокой древности искать его приближения рациональными числами. Древнегреческий ученый Архимед (около 287 — 212 до н. э.)

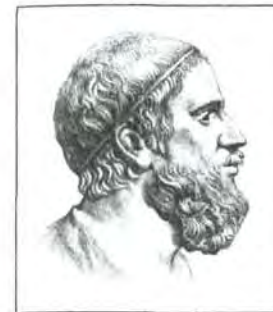


Рис. 309



Рис. 310



Рис. 311

(рис. 309) установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Китайский математик Цзу Чунчжи (около 430 — около 501) (рис. 310) доказал, что число π заключено между рациональными числами 3,1415926 и 3,1415927, и предложил приближение $\pi \approx \frac{355}{113}$.

Голландский математик Лудольф ван Цейлен (1540—1610) (рис. 311) вычислил значение числа π с 32 десятичными знаками, это число называют *лудольфовым числом*.

Обозначение π стало общепринятым после работы Леонарда Эйлера (1707—1783) (рис. 312), написанной в 1736 г. Эйлер нашел для числа π приближение с 153 десятичными знаками. ◀

В соответствии со следствием 5 параграфа 18 периметры P_{1n} и P_{2n} правильных вписанных в окружности n -угольников относятся как радиусы R_1 и R_2 этих окружностей: $\frac{P_{1n}}{P_{2n}} = \frac{R_1}{R_2}$. Это равенство истинно при всех значениях переменной n . Но при неограниченном увеличении количества сторон вписанных многоугольников их периметры будут неограниченно приближаться к длинам C_1 и C_2 окружностей. Поэтому равенство $\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2}$ истинно. Тогда истинно равенство $\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2}$, а значит, и равенство $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$.



Рис. 312

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная числу π :*

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Из этого равенства получаем, что

$$C = 2\pi R.$$

Пользуясь формулой $C = 2\pi R$, можно находить длину дуги окружности, соответствующей центральному углу величиной α . Сначала найдем дугу c_1 , соответствующую центральному углу в 1° , а затем искомую дугу:

$$c_1 = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}; c_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \pi R \frac{\alpha}{180}.$$

- ? 1. Запишите формулу для синуса удвоенного угла.
2. Запишите формулы для косинуса удвоенного угла.
3. Запишите формулу, выражающую связь длины окружности с ее диаметром.
4. Как можно найти длину дуги окружности, соответствующей центральному углу величиной α ?

775. Найдите величину центрального угла, учитывая, что от окружности соответствующая дуга составляет:

- а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; д) $\frac{2}{3}$;
б) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{6}$; е) $\frac{3}{4}$.

776. Найдите радиус окружности, у которой дуга в 1° имеет длину 1 м.

777. Перепишите таблицу в тетрадь и, приняв число 3,14 в качестве значения числа π , заполните пустые клетки таблицы, в которой C обозначает длину окружности, R — ее радиус.

C			164	24π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	6			0,71		304,5	$3\frac{1}{7}$	

778. Установите, как изменится длина C окружности, если ее радиус R :

- а) увеличить в 3 раза; в) увеличить в 1,3 раза;
б) уменьшить в 2 раза; г) уменьшить в $\frac{7}{3}$ раза.

779. Установите, как изменится длина окружности, если ее радиус:

- а) увеличить на a ; в) увеличить в a раз;
б) уменьшить на a ; г) уменьшить в a раз.

780. Установите, как изменится радиус окружности, если ее длину:

- а) увеличить в 5 раз; в) увеличить в 5,2 раза;
б) уменьшить в 11 раз; г) уменьшить в $2\frac{2}{3}$ раза.

781. Найдите длину окружности, описанной около:

- а) прямоугольного треугольника с гипотенузой c ;
б) равнобедренного треугольника с основанием a и углом α против него;
в) прямоугольника со стороной a и углом β между его диагоналями;
г) равнобедренной трапеции с диагональю d и углом γ при основании.

782. Найдите длину окружности, вписанной в:

- а) прямоугольный треугольник с катетом b и углом δ против него;
б) равнобедренный треугольник с высотой h , проведенной к основанию, и углом ϕ против нее;
в) ромб с диагоналями c и d ;
г) прямоугольную трапецию, у которой основание равно боковой стороне и равно l .

783. Есть две концентрические окружности, т. е. окружности с общим центром, ограничивающие кольцо шириной l (рис. 313). Найдите зависимость этой ширины от длин C_1 и C_2 окружностей.

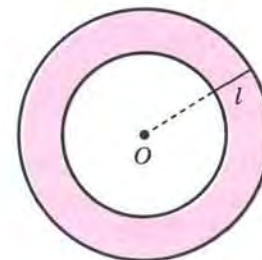


Рис. 313

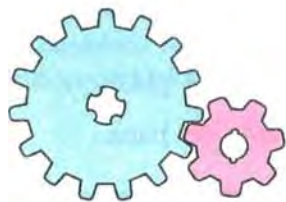


Рис. 314

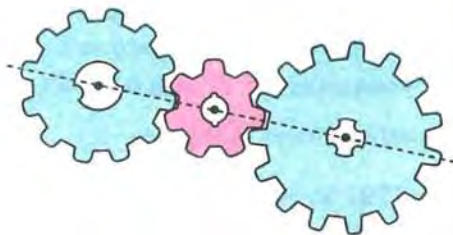


Рис. 315

784. Найдите зависимость между радиусом r колеса, которое катится по прямой, количеством n сделанных оборотов и длиной s пройденного пути.

785. Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, учитывая, что спутник обращается вокруг Земли на расстоянии 320 км от нее, а радиус Земли равен 6371 км.

786. Есть два сцепленных между собой зубчатых колеса с радиусами r_1 и r_2 (рис. 314). Найдите, сколько оборотов сделало большее колесо, учитывая, что меньшее колесо сделало n оборотов.

787. Есть три зубчатых колеса с радиусами r_1 , r_2 и r_3 , сцепленные так, как показано на рисунке 315. Найдите, сколько оборотов сделало третье колесо, учитывая, что первое колесо сделало n оборотов.

788. Метр приближенно составляет сорокамиллионную долю земного экватора. Найдите диаметр Земли в километрах, приняв, что Земля имеет форму шара.

789. Установите, на сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус Земли увеличился на:

- а) 1 см; б) 1 км.

790. Представим себе, что Землю по экватору обтянули веревкой, а затем ее длину увеличили на 1 м. Определите, может ли в зазор:

- а) который образует экватор с окружностью из удлиненной веревки, concentричную с экватором, пролезть мышь (рис. 316);
б) между поверхностью Земли и максимально оттянутой в каком-либо месте удлиненной веревкой пройти слон (рис. 317).



Рис. 316

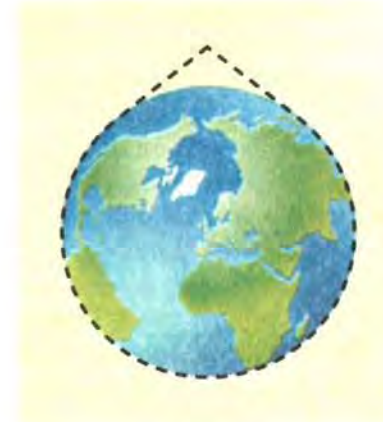


Рис. 317

791. Найдите отношение длин окружностей, вписанной в данный правильный n -угольник и описанной около него.

792. Докажите, что:

- а) длина l дуги окружности пропорциональна соответствующему центральному углу α при одном и том же радиусе R ;
б) длина l дуги окружности пропорциональна радиусу R при одном и том же центральном угле α ;
в) длины l_1 и l_2 двух дуг одной окружности относятся как их градусные меры.

793. Конус с радиусом основания R и высотой H положили боком на плоскость и покатали (рис. 318). Установите, сколько оборотов сделает основание конуса, пока конус вернется в исходное положение.

794. В окружности с радиусом R проведена хорда длиной R . Найдите длины дуг, стягиваемых этой хордой.

795. Найдите, под каким углом видна из центра окружности радиусом r ее дуга длиной l .

796. Найдите величину центрального угла, который опирается на дугу, равную радиусу окружности.

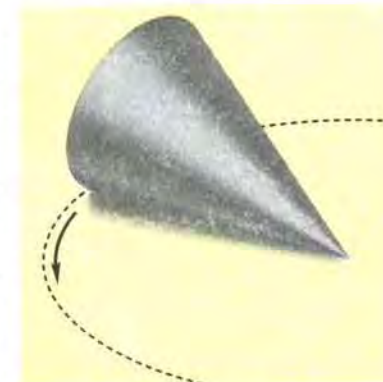


Рис. 318

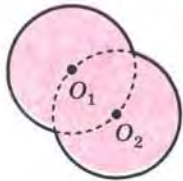


Рис. 319

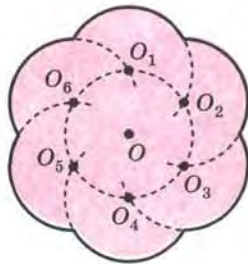


Рис. 320

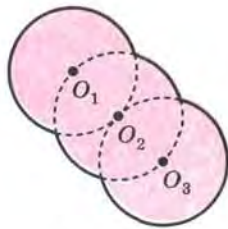


Рис. 321

797. В окружности с радиусом R найдите хорду, концы которой разделяют окружность на такие дуги, что:

- а) одна из них в два раза больше другой;
- б) длина одной из них составляет 20 % длины другой;
- в) длина одной из них составляет 125 % длины другой.

798. Учтывая, что радиусы всех окружностей равны r , найдите длину сплошной линии на рисунке:

- а) 319; б) 320; в) 321.

799. Учтывая, что сторона квадрата $O_1O_2O_3O_4$ равна a , а радиусы всех дуг равны этой стороне, найдите длину сплошной линии на рисунке 322.

800. Из точки проведены две касательные к данной окружности. Найдите длины дуг, на которые точки касания разделяют окружность, учтывая, что точка касания отстоит от данной точки на a , а угол между касательными равен ω .

801. Теперь на часах 12.00. Найдите путь, который пройдет конец минутной стрелки длиной l , пока она догонит часовую стрелку.

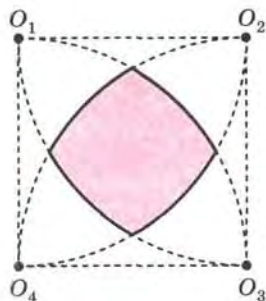


Рис. 322



Рис. 323

802. Есть отрезок MN . Нужно из точки M попасть в точку N , двигаясь только по полуокружностям, диаметры которых лежат на отрезке MN и соседние диаметры не накладываются друг на друга. Найдите кратчайший путь.

803. Автомобиль едет по дуге окружности. Объясните, почему его внешние колеса едут с большей скоростью по сравнению с внутренними. Найдите зависимость отношения их скоростей от радиуса поворота.

804. Найдите длину дуги окружности с радиусом 18 см, учтывая, что ее градусная мера равна:

- а) 30°; в) 60°; д) 120°; ж) 150°;
- б) 45°; г) 90°; е) 135°; з) 175°.

805. Шлифовальный камень в форме диска находится в защитном кожухе (рис. 323). Найдите длину дуги незащищенной части камня, учтывая, что диаметр камня равен 58 см, а дуга незащищенной его части составляет 117°.

806. Найдите длину маятника настенных часов (рис. 324), учтывая, что угол его колебаний составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

807. Найдите градусную меру дуги закругления железнодорожного полотна, радиус которого равен 5 км, а длина — 400 м.

808. Шкив диаметром 1,4 дм делает 100 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

809. Учтывая, что радиус Земли равен 6371 км, установите, какой угол ограничивают радиусы Земли, проведенные в две точки на ее поверхности, отстоящие на:

- а) 1 км;
- б) 10 км;
- в) 100 км;
- г) 1000 км;
- д) 10 000 км;
- е) 20 000 км.



Рис. 324

810. Радиус окружности равен 1 м. Найдите длину ее дуги, градусная мера которой равна:

- а) 45° ; в) 120° ; д) $60^\circ 30'$;
б) 30° ; г) $45^\circ 45'$; е) $150^\circ 36' 45''$.

811. Хорда окружности равна a . Найдите длину ее дуги, градусная мера которой равна:

- а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) 176° .

812. Дуга окружности равна l . Найдите ее хорду, учитывая, что градусная мера дуги равна:

- а) 60° ; б) 90° ; в) 120° ; г) 176° .

813. В единичной окружности проведены хорды длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найдите отношение меньших дуг, соответствующих этим хордам.

814. Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 94,2 мм. Диаметр колеса равен 900 мм. Найдите количество зубьев колеса.

815. Центр меньшей окружности с радиусом r находится на большей окружности с радиусом R . Найдите длину дуги большей окружности внутри меньшей окружности, учитывая, что длина дуги меньшей окружности внутри большей окружности равна l .

816. Найдите отношение периметра правильного вписанного n -угольника к диаметру описанной окружности и установите относительную погрешность замены числа π этим отношением, учитывая, что значение переменной n равно:

- а) 6; б) 8; в) 12.

817. В древности в качестве приближенного значения числа π использовали числа $\sqrt{10}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$. Найдите относительную погрешность каждого из этих приближений.

818. Внутри окружности с радиусом R расположена цепочка из n равных окружностей, которые касаются друг друга и данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, учитывая, что этих окружностей:

- а) 3 (рис. 325); б) 4 (рис. 326); в) 6 (рис. 327).

819. Вне окружности с радиусом R расположена цепочка из n равных окружностей, которые касаются друг друга и



Рис. 325



Рис. 326



Рис. 327

данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, учитывая, что этих окружностей:

- а) 3 (рис. 328); б) 4 (рис. 329); в) 6 (рис. 330).

820. Решите неравенство:

- а) $\frac{z-1}{z^2+4z+2} < 0$; в) $\frac{t^2-6t+18}{t-4} > 0$;
б) $\frac{u^2-3u+1}{u^2-1} > 1$; г) $\frac{y}{y^2+3y+2} > \frac{y}{y^2+7y+12}$.

821. Угол против основания равнобедренного треугольника равен 120° . Найдите:

- а) основание треугольника, учитывая, что боковая сторона равна единице;
б) боковую сторону треугольника, учитывая, что основание равно единице.

822. Установите вид треугольника в зависимости от величины его большего угла, учитывая, что одна из медиан треугольника равна той его средней линии, которую она пересекает.



Рис. 328

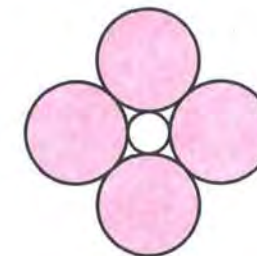


Рис. 329

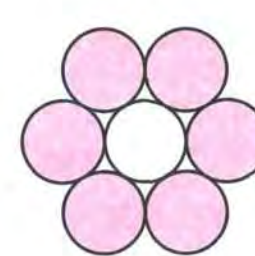


Рис. 330

823. Установите вид треугольника в зависимости от величины его большего угла, учитывая, что его стороны равны:

- а) 10; 12; 14; в) 15; 30; 30; д) l ; $l+1$; $l+2$.
б) 10; 12; 20; г) 0,3; 0,4; 0,5;

824. В трапеции $ABCD$ основание BC равно AB и в 2 раза меньше AD . Найдите площадь трапеции, учитывая, что $AC = 12$, $CD = 15$.

825. Автомобиль выезжает из A , доезжает до B и сразу поворачивает назад. Через 1 ч после выхода из A автомобиль был в 80 км от B , а еще через 3 ч — в 80 км от A . Найдите расстояние между A и B , учитывая, что на весь путь из A в B и назад до A автомобиль затратил менее 9 ч.

826. Из городов A и B одновременно навстречу выехали две машины и встретились через 8 ч. Встреча состоялась бы

через 7 ч, если бы одна машина увеличила свою скорость на 14 %, а другая — на 15 %. Во сколько раз скорость одной машины больше скорости другой?

827. В 9 ч из города A со скоростью 42 км/ч выехал мотоциклист. В 9 ч 40 мин в том же направлении со скоростью 71 км/ч выехал автомобиль. Когда расстояние между ними станет равным 30 км?

828. Сидней, Мельбурн, Брисбен, Перт, Аделаида — наибольшие города Австралийского Союза (рис. 331). Население Перта относится к населению Брисбена как 85 : 96, а к увеличенному на 2 тыс. чел. населению Аделаиды как 80 : 63. Население Брисбена, уменьшенное на 114 тыс. чел. населения Сиднея и увеличенное на 219 тыс. чел. населения Мельбурна относятся как 3 : 8 : 7. Найдите численность населения этих городов, учитывая, что население Сиднея на 245 тыс. чел. больше общего населения Брисбена, Перта и Аделаиды.

* * *

829. Запишите трехзначное число, первая цифра которого превышает последнюю не меньше чем на 2. Найдите разность его и обращенного числа и прибавьте число, обращенное полученному. Объясните, почему в результате получается 1089.

830. Прямая l пересекает стороны AB , AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках M , N и K соответственно. Докажите, что $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AK}$.

831. Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$ ни при каком натуральном n не является целым числом.



Рис. 331

20. Площадь круга

Формулу для нахождения площади круга можно получить, используя формулу $S = \frac{1}{2} Pr$, связывающую площадь S многоугольника, его периметр P и радиус r вписанной в него окружности, и формулу $C = 2\pi r$, которая длину C окружности выражает через ее радиус r .

Теорема 7. Площадь S круга с радиусом r выражается формулой

$$S = \pi r^2.$$



Рис. 332



Рис. 333

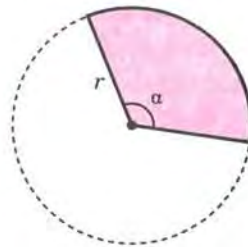


Рис. 334

Доказательство. Пусть есть круг с радиусом r (рис. 332). Опишем около него правильный n -угольник (рис. 333). Тогда его площадь S_n выразится через его периметр P_n и радиус r круга формулой

$$S_n = \frac{1}{2} P_n r.$$

Если значение переменной n возрастает, то площадь S_n многоугольника приближается к площади S круга, значение переменной P_n убывает и стремится к длине C окружности, которая равна $2\pi r$. Значит,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2.$$

Теорема 8. Площадь S_α сектора с радиусом r и центральным углом с градусной мерой α выражается формулой

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{360} \pi r^2.$$

Доказательство. Пусть есть сектор с радиусом r , ограниченный дугой с градусной мерой α (рис. 334). Площадь сектора, ограниченного дугой в 1° , составляет $\frac{1}{360}$ -ю долю площади всего круга с радиусом r , т. е. равна $\frac{1}{360} \cdot \pi r^2$. Поэтому для площади S_α данного сектора получим:

$$S_\alpha = \frac{1}{360} \cdot \pi r^2 \cdot \alpha = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2.$$

Следствие 1. Площадь Q_α сегмента с радиусом r , ограниченного дугой с градусной мерой α выражается формулой

$$Q_\alpha = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right).$$

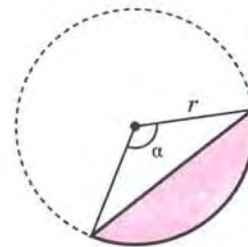


Рис. 335

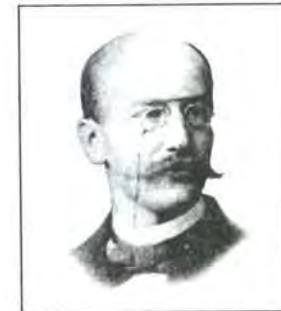


Рис. 336

Действительно, площадь Q_α можно найти, если из площади сектора вычесть площадь треугольника, ограниченного радиусами и хордой (рис. 335).

► Для нахождения длины окружности и площади круга нужно знать значение числа π . Для его вычисления делалось много попыток. Одну из них мы обсуждали в параграфе 19, когда находили значение числа π через правильные многоугольники, вписанные в окружность и описанные около нее. Эту проблему пытались решить еще в Древней Греции путем построения линейкой и циркулем квадрата, площадь которого была бы равной площади круга. Проблема получила название *квадратуры круга*. Ее долго не удавалось решить, и только в 1882 г., примерно через две тысячи лет после возникновения, немецким математиком Ф. Линдеманом (рис. 336) было доказано, что это вообще невозможно сделать. Теперь словосочетание *квадратура круга* часто означает неразрешимую задачу.

С правильными многоугольниками связана так называемая *изопериметрическая задача* о нахождении фигур наибольшей площади при заданном периметре. Доказано, что из всех фигур, ограниченных замкнутой линией данной длины, круг имеет наибольшую площадь, среди всех n -угольников с данным периметром наибольшую площадь имеет правильный n -угольник. ◀

- ?
1. Запишите формулу площади круга и объясните, что означает каждая ее буква.
 2. Какая часть круга называется сектором? Как найти площадь сектора?
 3. Какая часть круга называется сегментом? Как найти площадь сегмента?

832. Перечертите таблицу в тетрадь и, взяв число 3,14 в качестве значения числа π , заполните ее пустые клетки, где S обозначает площадь круга, а R — его радиус.

S			90		64π			6,25
R	12	50		$\frac{2}{7}$		108,6	$\sqrt{3}$	

833. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью с длиной C .

834. Найдите площадь кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями с радиусами:

- а) 40 мм и 60 мм;
- б) 55 мм и 65 мм;
- в) a и b , причем $a > b$.

835. Установите, во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить:

- а) в 2 раза;
- б) в 5 раз;
- в) в k раз.

836. Установите, может ли сумма радиусов некоторого количества кругов быть больше 100, а сумма их площадей — меньше 0,01.

837. Используя формулу площади круга:

- а) укажите, пропорциональность каких величин она выражает;
- б) докажите, что площади кругов относятся как квадраты их радиусов;
- в) найдите зависимость площади круга от длины соответствующей окружности.

838. Найдите площадь круга, описанного около:

- а) равностороннего треугольника со стороной 6;
- б) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему острым углом α ;
- в) равнобедренного треугольника с основанием s и высотой h ;
- г) равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 30 и боковой стороной 10;
- д) равнобедренной трапеции с основанием 10, которое составляет с боковой стороной и с диагональю углы β и γ соответственно.

839. Найдите площадь круга, вписанного в:

- а) равносторонний треугольник со стороной, равной 3;
- б) прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом φ ;
- в) равнобедренный треугольник с боковой стороной a и высотой h ;
- г) равнобедренную трапецию с основаниями 30 и 70;
- д) равнобедренную трапецию с основанием 40 и углом β при основании.

840. Найдите площадь кольца, радиусы ограничивающих окружностей которого равны R_1 и R_2 , где $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, учитывая, что R_1 и R_2 соответственно равны:

- а) 15 см и 25 см;
- б) 2,3 м и 4 м;
- в) 240 мм и 2,8 см.

841. Найдите, какой радиус имеет окружность, целиком принадлежащая кругу и разделяющая его площадь пополам.

842. Учитывая, что круг и квадрат имеют одинаковые:

- а) периметры, сравните их площади;
- б) площади, сравните их периметры.

843. Кольцо ограничивают две концентрические окружности, отношение радиусов которых равно 0,9. Определите, какая часть большего круга лежит в кольце.

844. Найдите формулу, связывающую площадь S кольца, его ширину d (рис. 337) и длину C окружности, равноудаленной от границ кольца.

845. На мишени есть четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трех колец мишени.

846. Укажите, как круг с радиусом R разделить концентрическими окружностями на 5 равновеликих фигур.

847. Найдите толщину слоя, который нужно снять с круглой медной проволоки с площадью поперечного сечения 314 мм^2 , чтобы она проходила через отверстие диаметром 18,5 мм.

848. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямо-

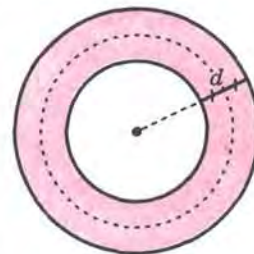


Рис. 337

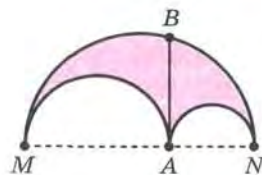


Рис. 338

угольного треугольника, равна сумме площадей полуокружностей, построенных на катетах этого треугольника.

849. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей двух данных кругов.

850. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него:

- а) квадрата;
- б) правильного треугольника;
- в) правильного шестиугольника.

851. На рисунке 338 представлена фигура, граница которой состоит из трех полуокружностей, причем диаметры AM и AN меньших полуокружностей вместе составляют диаметр MN большей полуокружности. Такая фигура называется *арбелосом Архимеда*. Докажите, что его площадь равна $\frac{1}{4} \pi \cdot AB^2$, где отрезок AB — та часть общей касательной к меньшим полуокружностям в точке их касания, которая принадлежит арбелосу.

852. На прямой p выбрали точки A, B, C, D в указанном порядке, причем отрезки AD и BC оказались равными k и l соответственно. Найдите площадь фигуры, ограниченной полуокружностями с диаметрами AB, AC, BD и CD , учитывая, что две первые полуокружности расположены по одну сторону от прямой p , а две другие — по другую сторону.

853. Определите, какую часть площади круга составляет площадь его сектора, ограниченного дугой с градусной мерой v :

- а) 15° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° ; д) 120° ; е) 180° ; ж) 270° ; з) 315° .

854. Определите, какую часть площади круга составляет площадь его сектора, ограниченного дугой, длина которой равна:

- а) радиусу круга;
- б) диаметру круга;
- в) числовому значению площади сектора.

855. Из круга, радиус которого равен 10 см, вырезан сектор с дугой в 60° . Найдите площадь оставшейся части круга.

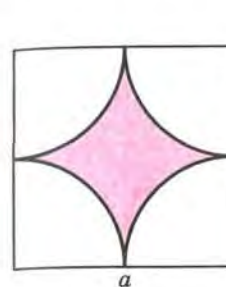


Рис. 339

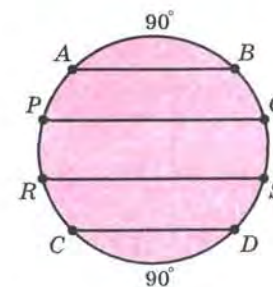


Рис. 340

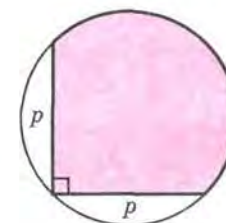


Рис. 341

856. Найдите радиус сектора с центральным углом 72° , площадь которого равна S .

857. Найдите площадь окрашенной части квадрата со стороной a , показанного на рисунке 339.

858. Найдите площади сегментов, на которые круг с радиусом R разделяет его хорда, которая видна под углом α из центра круга.

859. Две пересекающиеся хорды стягивают дуги в 150° . Какую часть круга они ограничивают?

860. Две параллельные хорды AB и CD отсекают от окружности дуги по 90° (рис. 340), а еще две хорды PQ и RS , параллельные хорде AB , разделяют оставшиеся дуги на доли. Определите, в каком отношении эти хорды делят круг.

861. Для определения площади сегмента, которые ограничены небольшой дугой (меньшей 150°), используют приблизительную формулу $S = \frac{2}{3}bh$, где b — длина хорды (основания сегмента), h — расстояние до хорды от наиболее отдаленной точки дуги (стрелка). Найдите погрешность при использовании этой формулы для сегмента с дугой:

- а) 45° ; б) 30° .

862. Найдите площадь части круга радиусом R , окрашенного на рисунке:

- а) 341, учитывая, что площадь каждого неокрашенного сегмента равна p ;
- б) 342, учитывая, что площади неокрашенных сегментов равны p_1 и p_2 ;

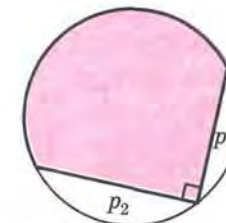


Рис. 342

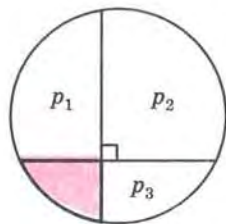


Рис. 343

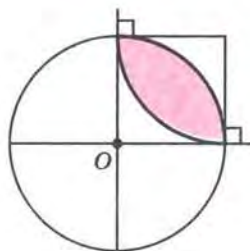


Рис. 344

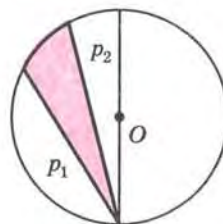


Рис. 345

- в) 343, учитывая, что площади неокрашенных частей круга равны p_1 , p_2 и p_3 ;
 г) 344, учитывая, что площадь круга равна p ;
 д) 345, учитывая, что площадь отмеченного сегмента равна p_1 , а площадь отмеченной части полукруга равна p_2 .

863. Как найти площадь части круга радиусом r , заключенной между двумя его параллельными хордами длиной a и b ?

864. Когда в единичном круге провели хорду длиной 1, то площадь меньшего из полученных сегментов оказалась равной S . Найдите угол сектора, площадь которого также равна S .

865. В единичном круге проведены две непересекающиеся хорды длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, которые разделили круг на 3 части, причем площадь наибольшей части оказалась больше 2,3. Найдите площадь меньшей части.

866. Найдите площадь пересечения и объединения двух кругов с радиусами 1 и $\sqrt{3}$, расстояние между центрами которых равно 2.

867. Найдите площадь общей части четырех единичных кругов, центры которых находятся в вершинах единичного квадрата.

868. Найдите радиусы равных кругов, целиком покрывающих данный единичный круг, учитывая, что всего использовано кругов:

- а) 3; б) 4; в) 5; г) 6.

869. Есть отрезок MN и перпендикулярная ему прямая l . Пусть A — произвольная точка прямой l . Докажите, что площадь фигуры, образованной при вращении отрезка MN вокруг точки A , не зависит от положения точки A .

870. Вершины правильного шестиугольника со стороной 2 являются центрами кругов с радиусом $\sqrt{2}$. Найдите площадь расположенной вне этих кругов части шестиугольника.

871. Учитывая, что $7^{\frac{1}{2}} \approx 2,646$, найдите:

- а) $7^{\frac{3}{2}}$; в) $7^{-\frac{1}{2}}$; д) $7^{-\frac{5}{2}}$;
 б) $7^{\frac{5}{2}}$; г) $7^{-\frac{3}{2}}$; е) $7^{-\frac{7}{2}}$.

872. Решите неравенство:

- а) $a - 2 < \frac{3}{a}$; в) $n - \frac{1}{n} > 4$;
 б) $\frac{y}{3} - \frac{4}{y} > \frac{4}{3}$; г) $m - 3 \leq \frac{3}{m-1}$.

873. Один цех от оказания услуг населению получает 27 % своей прибыли, а другой — 37 %. Известно, что оказание услуг населению приносит 31 % их общей прибыли. Определите, какой цех получает больший доход и во сколько раз.

874. Букинистический магазин продал книгу со скидкой в 10 % от первоначально назначенной цены и получил при этом 8 % прибыли. Найдите, какой процент прибыли планировал получить магазин сначала.

875. Велосипедист из Катичева до Брагина ехал со скоростью на 2,5 км/ч большей, чем из Брагина до Хойников (рис. 346). Найдите время, затраченное велосипедистом на первую и вторую части пути, учитывая, что средняя скорость движения на всем пути составила $16\frac{2}{3}$ км/ч.

876. Когда два прута с квадратными сечениями и объемами 720 см³ и 480 см³ сплестили в один с площадью сечения, равной сумме площадей сечений исходных прутков, то получился прут длиной 48 см. Найдите размеры прутков, учитывая, что длина первого из них была на 50 см больше.



Рис. 346

877. Когда из двух прямоугольников с площадями 2546 мм^2 и 5529 мм^2 образовали их перекраиванием прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен сумме меньших измерений прямоугольников, то другой катет оказался равным 170 мм . Найдите измерения исходных прямоугольников, учитывая, что большее измерение прямоугольника с большей площадью было на 30 мм больше большего измерения другого прямоугольника.

* * *

878. Докажите, что для любой точки M , взятой внутри правильного n -угольника, найдутся такие его вершины A и B , что

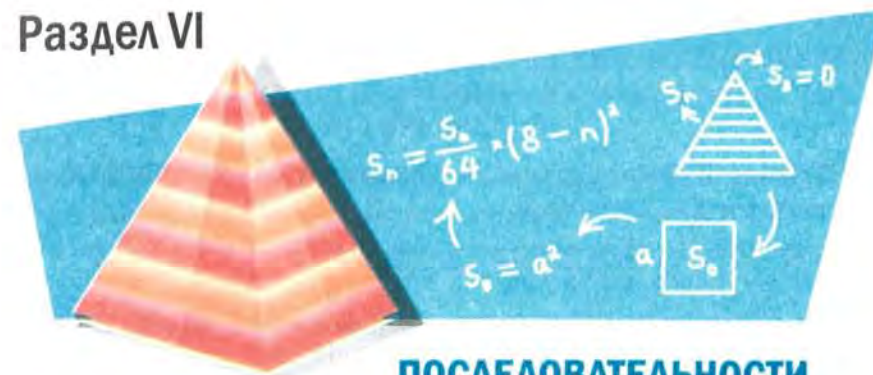
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 180^\circ \leq \angle AMB \leq 180^\circ.$$

879. Докажите, что числа $49, 4489, 444889$ и все другие, которые получаются после вписывания в середину предыдущего числа цифр 4 и 8 в указанном порядке, являются точными квадратами.

880. Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \dots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

Раздел VI



21. Числовая последовательность

Пример 1. Древняя легенда говорит, что индийскому принцу Сираму (VI в.) очень понравилась игра в шахматы, и он захотел щедро вознаградить изобретателя игры: «Проси, что хочешь. Я достаточно богат, чтобы выполнить твоё самое смелое желание». Изобретатель попросил положить на первую клетку шахматной доски зернышко риса, на вторую — два зернышка, на третью — 4 зернышка, и так далее до 64-й клетки, увеличивая количество зерен на каждой следующей клетке в два раза. Принц рассмеялся такому, как он посчитал, мизерному вознаграждению и приказал незамедлительно выдать рис. Но вознаграждение не было выдано, так как это больше, чем было собрано во всех урожаях за историю человечества.

Выпишем числа, соответствующие нескольким первым клеткам доски, оформив это таблицей.

Номер клетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Количество зерен	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Здесь каждому натуральному числу от 1 до 64 ставится в соответствие определенное натуральное число. Это означает, что задана функция, область определения которой состав-

ляют первые 64 натуральных числа. Если обозначить эту функцию f , то можно записать:

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(10) = 512, f(15) = 16\,384, \\ f(30) = 536\,870\,912.$$

Пример 2. Упорядочим по убыванию доли, т. е. дроби с числителем 1, — получим:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

Здесь явно выписаны только первые шесть долей. Понятно, что на седьмом месте находится доля $\frac{1}{8}$, на сороковом — доля $\frac{1}{41}$, на сотом — доля $\frac{1}{101}$. Вообще, каждому натуральному числу соответствует определенная доля. Иначе, здесь задана функция, областью определения которой является множество натуральных чисел. Если обозначить эту функцию a , то можно записать:

$$a(1) = \frac{1}{2}, a(2) = \frac{1}{3}, a(10) = \frac{1}{11}, a(15) = \frac{1}{16}, a(30) = \frac{1}{31}, \\ a(n) = \frac{1}{n+1}.$$

Функция, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество первых n натуральных чисел, называется **последовательностью**.

Короче, последовательность — это функция, часто числовая, натурального аргумента. Если последовательность определена на множестве всех натуральных чисел, то она называется **бесконечной последовательностью**, а если на множестве первых n натуральных чисел, то — **конечной последовательностью**.

Числа, образующие последовательность, называют **членами последовательности**. Обычно члены последовательности обозначают малыми латинскими буквами с индексами, т. е. вместо $a(1)$ пишут a_1 , вместо $a(2)$ — a_2 , вместо $a(3)$ — a_3 и т. д. Понятно, что можно использовать другие буквы b, c, d и т. д. Запись a_n читают *а энное*. Саму последовательность с членами a_n обозначают (a_n) (рис. 347).

Последовательность, являющаяся возрастающей функцией, называется **возрастающей последовательностью**. Каждый член возрастающей последовательности, начиная со второго, больше предыдущего.

Последовательность (a_n)

Обозначение члена	a_1	a_2	a_3	...	a_n	...
Значение члена	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{n+1}$	...
Название члена	первый	второй	третий	...	n -й	...

Рис. 347

Последовательность, являющаяся убывающей функцией, называется **убывающей последовательностью**. Каждый член убывающей последовательности, начиная со второго, меньше предыдущего.

Последовательность из примера 1 — возрастающая, из примера 2 — убывающая.

Пример 3. Последовательность

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \dots$$

знаки членов которой чередуются, а модуль каждого следующего члена в два раза больше модуля предыдущего члена не является возрастающей и не является убывающей.

Как и любая функция, последовательность может задаваться разными способами.

Последовательность в примере 1 задана *описанием*, а потом и *таблицей*.

Последовательность может быть задана *формулой* ее n -го члена. Например, последовательность в примере 2 мы сначала задали описанием, а затем по этому описанию получили формулу $a_n = \frac{1}{n+1}$ ее n -го члена. По описанию последовательности в примере 3 можно получить такую формулу $b_n = (-2)^n$.

Последовательность, как функция, может быть представлена *графиком*. Например, на рисунке 348 изображен график последовательности, заданной

формулой $c_n = \frac{6(n-1)}{n}$ ее n -го члена для значений переменной n из промежутка $[1; 12]$.

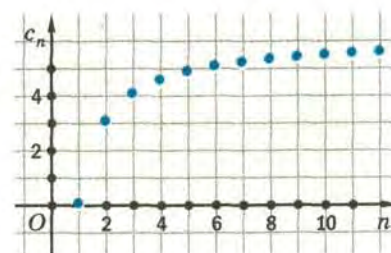


Рис. 348

Иной раз последовательность задают формулой, которая дает возможность найти n -й ее член через предыдущие члены.

Пример 4. Последовательность (d_n) зададим условиями:

$$d_1 = 1, d_2 = 1, d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \text{ при } n > 2,$$

явно указав первый и второй члены и правило-формулу для получения каждого следующего члена через два предыдущих. Такую формулу называют *рекуррентной формулой*, а равенства, которыми задаются первые члены последовательности, — *начальными условиями*.

Члены последовательности (d_n) называют *числами Фибоначчи* в честь Леонардо Пизанского (1180—1240), в рукописи которого она впервые появилась. Числа Фибоначчи имеют много применений в математике и программировании.

Пример 5. Рассмотрим последовательность (e_n) , заданную начальным условием $e_1 = 1$ и рекуррентной формулой $e_n = e_{n-1} \cdot n$.

Найдем несколько первых членов этой последовательности:

$$\begin{aligned} e_1 &= 1; \\ e_2 &= e_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2; \\ e_3 &= e_2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \\ e_4 &= e_3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24; \\ e_5 &= e_4 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

Можно заметить, что в этой последовательности n -й член равен произведению $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ всех натуральных чисел от 1 до n .

Произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ обозначают $n!$, называют **факториалом** числа n и читают *эн факториал*.

Используя введенное обозначение, можно рассматриваемую последовательность задать следующей формулой ее n -го члена:

$$e_n = n!.$$

- ?
1. Какая функция называется последовательностью? Как называют числа, образующие последовательность?
 2. Как обозначают члены последовательности; саму последовательность?
 3. Какая последовательность называется бесконечной последовательностью; конечной последовательностью?
 4. Какая последовательность называется возрастающей; убывающей?
 5. Назовите способы задания последовательности.
 6. Какой способ задания последовательности называют рекуррентным?
 7. Какое выражение называют факториалом натурального числа n ? Как его обозначают?

881. Таблицей, в которой приведено расписание занятий в X классе на один учебный день, задана конечная последовательность.

Номер урока	Учебный предмет
1	Всемирная история
2	Биология
3	Математика
4	Белорусская литература
5	Информатика
6	Физкультура

Назовите:

- а) количество членов этой последовательности;
- б) номер члена последовательности со значением *Информатика*;
- в) номер члена последовательности со значением *Белорусская литература*;
- г) значение члена последовательности с номером 2;
- д) значение члена последовательности с номером 6.

882. Запишите область определения и область значений функции, являющейся конечной последовательностью:

- а) 1, 3, 5, 7, 9;
- б) 40, 10, 30, 40, 10, 30;
- в) 1, -1, 1, -1, 1, -1.

Задайте эту функцию *перечислением пар*.

883. Установите, какой — возрастающей, убывающей, не возрастающей и не убывающей — является последовательность:

- а) (a_n) : 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002;
- б) (b_n) : 0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; 0,22222;
- в) (c_n) : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$;
- г) (d_n) : $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$;
- д) (x_n) : -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9, 10;
- е) (y_n) : 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7.

884. Есть последовательность (x_n) , членами которой являются последовательные десятичные знаки представления обыкновенной дроби $\frac{4}{7}$ бесконечной десятичной дробью. Найдите $x_1, x_2, x_3, x_{10}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{22}$. Установите:

- а) есть ли среди членов этой последовательности одинаковые;
б) является ли эта последовательность возрастающей или убывающей.

885. Есть последовательность (t_n) , членами которой являются последовательные десятичные приближения обыкновенной дроби $\frac{4}{7}$ с точностью до десятых, сотых, тысячных и т. д. Найдите $t_1, t_2, t_3, t_{10}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{22}$. Установите:

- а) есть ли среди членов этой последовательности одинаковые;
б) является ли эта последовательность возрастающей или убывающей.

886. Установите, какой — возрастающей, убывающей, не возрастающей и не убывающей — является последовательность:

- а) (a_n) , график которой изображен на рисунке 349;
б) (b_n) , график которой изображен на рисунке 350;
в) (c_n) , график которой изображен на рисунке 351;
г) (d_n) , график которой изображен на рисунке 352.

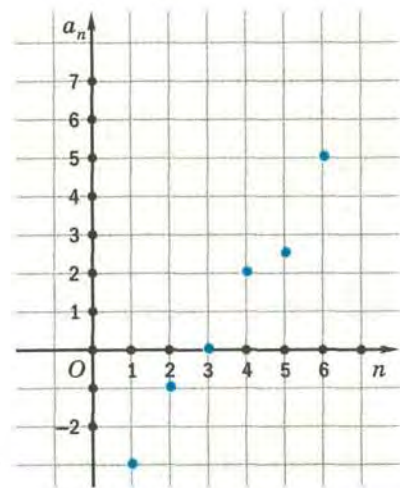


Рис. 349

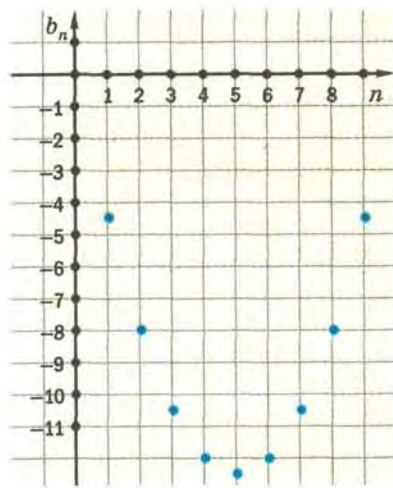


Рис. 350

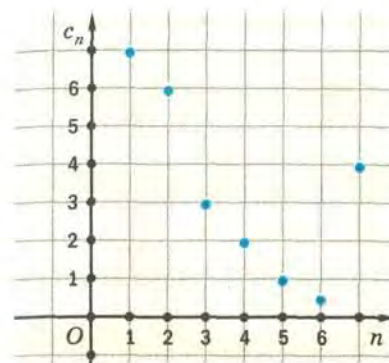


Рис. 351

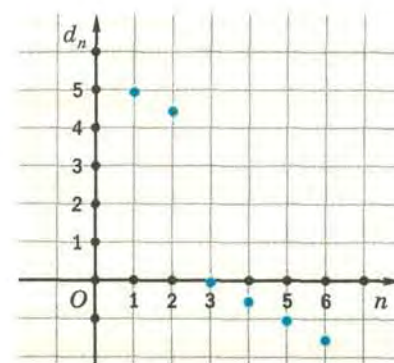


Рис. 352

887. Запишите последовательность (u_n) , членами которой являются:

- а) записанные по возрастанию все двузначные числа, образованные с помощью цифр 1, 2, 7;
б) записанные по убыванию все двузначные числа, образованные с помощью цифр 0, 3, 9.

888. Запишите 5 первых членов последовательности, заданной формулой:

- а) $x_n = 3n + 2$; в) $t_n = \frac{12}{n+1}$; д) $w_n = (-1)^n \cdot 7$;
б) $y_n = |2 - 3n|$; г) $u_n = 2^{n-1}$; е) $c_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

889. Последовательность (u_n) задана формулой $u_n = 3n - 4$. Найдите член последовательности с номером, равным:

- а) 7; б) 11; в) k ; г) $k + 1$.

890. Последовательность (t_n) задана формулой $t_n = 4n + 1$. Найдите номер члена последовательности, значение которого равно:

- а) 93; б) 397; в) 1113; г) 33 333.

891. Установите, является ли членом последовательности (w_n) , заданной формулой $w_n = n^2 + 2n + 1$, число:

- а) 289; б) 1000; в) 841; г) 1025.

892. Установите, начиная с какого номера члены последовательности (y_n) , заданной формулой $y_n = n^2$, больше:

- а) 10; б) 100; в) 1000; г) 10 000.

893. Установите, начиная с какого номера члены последовательности (a_n) , заданной формулой:

- а) $a_n = n^2 - n - 6$ — положительны;
б) $b_n = -n^2 + 8n$ — отрицательны.

894. Выпишите пять первых членов последовательности, учитывая, что:

- а) первый ее член равен 3, а каждый член, начиная со второго, получается увеличением предыдущего члена на 11;
б) первый член равен 8, а каждый член, начиная со второго, получается увеличением предыдущего в три раза;
в) первый член последовательности равен 16, а каждый член, начиная со второго, получается уменьшением предыдущего в два раза;
г) первый член равен 1, а каждый член, начиная со второго, получается делением предыдущего члена на номер искомого члена.

895. Найдите первых пять членов последовательности (c_n) , учитывая, что:

- а) $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ и $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ при $n > 2$;
б) $c_1 = 10$, $c_2 = 4$ и $c_{n+2} = c_n - c_{n+1}$.

896. Выпишите первые шесть членов последовательности (z_n) и задайте ее формулой n -го члена, учитывая, что:

- а) $z_1 = 10$, $z_{n+1} = z_n + 10$; в) $z_1 = 2$, $z_{n+1} = z_n + 2$;
б) $z_1 = 10$, $z_{n+1} = z_n \cdot 10$; г) $z_1 = 2$, $z_{n+1} = z_n \cdot 2$.

897. Подберите какую-либо формулу n -го члена последовательности, первые четыре члена которой следующие:

- а) 1, 4, 9, 16; в) 2, 5, 10, 17;
б) $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$; г) 1, 8, 27, 64.

898. Вычислите пять первых членов последовательности, учитывая, что:

- а) $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$;
б) $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_{n+2} = 3b_{n+1} + 2b_n$;
в) $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = 4c_{n+1} + 3c_n$;
г) $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_{n+2} = 2d_{n+1} + 5d_n$.

899. Вычислите пять первых членов последовательности, учитывая, что:

- а) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_{n+3} = 3x_{n+2} + x_{n+1} + 2x_n$;
б) $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $z_3 = 7$, $a_{n+3} = 3z_{n+2} + z_{n+1} + 2z_n$.

900. Докажите, что последовательность с общим членом:

- а) $a_n = \frac{2n}{2n+1}$ является возрастающей;
б) $b_n = \frac{2n+3}{6n-5}$ является убывающей.

901. Найдите условия, которым должны удовлетворять положительные числа a , b , c и d , чтобы последовательность с общим членом $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$ была:

- а) убывающей; б) возрастающей.

902. Найдите шесть первых членов и составьте формулу общего члена последовательности, заданной таким описанием:

- а) последовательность чисел, кратных 7;
б) последовательность четных чисел, кратных 7;
в) последовательность нечетных чисел, кратных 7;
г) последовательность нечетных чисел, которые при делении на 7 дают остаток 4.

903. Найдите шесть первых членов последовательности десятичных приближений с точностью до целой, десятой, сотой и т. д. числа:

- а) π ; в) $\sqrt[3]{3}$; д) $\cos 45^\circ$; ж) $\operatorname{ctg} 120^\circ$.
б) $\sqrt{3}$; г) $\sin 60^\circ$; е) $\operatorname{tg} 60^\circ$;

904. Есть последовательность, заданная формулой $c_n = \frac{2n+1}{3n}$. Определите:

- а) на сколько сотый член этой последовательности отличается от числа $\frac{2}{3}$;
б) при каких значениях переменной n истинно неравенство $c_n - \frac{2}{3} < 10^{-3}$;
в) при каких значениях переменной n истинно неравенство $c_n - \frac{2}{3} < 10^{-10}$.

905. Найдите все трехзначные числа, сумма цифр которых равна 3. Запишите последовательность, которая составлена из этих чисел, расположенных по возрастанию.

906. Есть последовательность (y_n) , каждый член которой равен разности его утроенного номера и единицы. Найдите:

- а) y_5 ; б) y_8 ; в) y_{10} ; г) y_{501} ; д) y_k ; е) y_{3k-1} .

907. Последовательность задана формулой $a_n = 5n - n^2$. Найдите номер члена этой последовательности, значение которого равно:

- а) -36; б) 4; в) 6; г) -500; д) 0; е) -9500.

908. Запишите пять первых членов и формулу n -го члена последовательности:

- а) натуральных чисел, кратных 3 и 5;
б) натуральных чисел, кратных 6 и 9.

909. Запишите формулу n -го члена последовательности:

- а) трехзначных чисел, кратных 37;
б) трехзначных чисел, записанных с использованием одной цифры и кратных 37.

910. Запишите какую-либо формулу n -го члена последовательности:

- а) 5, 10, 15, 20, 25, ...; б) 25, 20, 15, 10, 5, ...

911. Есть две последовательности (a_n) и (b_n) , заданные формулами $a_n = 4n - 1$ и $b_n = 4n + 1$. Запишите n -й член такой последовательности (c_n) , что $c_n = a_n + b_n$.

912. Количество d_n диагоналей выпуклого многоугольника определяется формулой $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$, где n — количество сторон и $n \geq 4$. Установите, существует ли многоугольник, количество диагоналей которого равно:

- а) 9; б) 14; в) 35; г) 152; д) 200; е) 275.

913. Установите, у каких многоугольников количество диагоналей не больше:

- а) 20; б) 36; в) 42; г) 152; д) 200; е) 376.

914. Есть последовательность (a_n) , заданная формулой n -го члена. Найдите, при каких значениях переменной n истинно неравенство:

- а) $a_n > \frac{2}{3}$, если $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; б) $a_n > 5$, если $a_n = \frac{8n-17}{n}$.

915. Есть последовательность (b_n) , заданная формулой $b_n = n + \frac{1}{n}$. Установите, при каких значениях переменной n истинно неравенство:

- а) $b_n > 2$; б) $b_n > 5$; в) $b_n \leq 6$; г) $3 < b_n < 20$.

916. Установите, какой — возрастающей, убывающей, не возрастающей и не убывающей — является последовательность, заданная формулой n -го члена:

- а) $a_n = 10 - n$; б) $b_n = \frac{n+3}{2}$; в) $c_n = |3 - n|$; г) $d_n = \frac{1}{n}$; д) $e_n = 1 + \frac{2}{n}$; е) $u_n = \frac{n+n^2}{1+n}$; ж) $t_n = (n-6)^2$; з) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; и) $z_n = n - \frac{1}{n}$.

917. Найдите, если возможно, наибольший и наименьший члены последовательности, заданной формулой n -го члена:

- а) $y_n = -n^2 + 6n + 3$; б) $a_n = n^2 - 8n + 1$; в) $z_n = \frac{1}{n-3,5}$; г) $b_n = \frac{5n-12}{n}$.

918. Есть последовательность $x_n = \frac{5n-1}{n}$. Установите:

- а) семь ее первых членов;
б) какая это последовательность — возрастающая или убывающая.

919. Есть последовательность $x_n = \frac{5n-1}{n}$. Составьте разность $5 - x_n$ и найдите множество значений переменной n , при которых:

- а) $5 - x_n < \frac{1}{8}$; б) $5 - x_n < 0,1$; в) $5 - x_n < 0,001$.

920. Есть последовательность $x_n = \frac{1}{n}$. Найдите множество значений переменной n , при которых значение x_n :

- а) принадлежит промежутку $[0; 1]$;
- б) принадлежит промежутку $[0,01; 1,01]$;
- в) принадлежит промежутку $[0,001; 0,01]$;
- г) принадлежит промежутку $[-0,1; 0,1]$;
- д) не принадлежит промежутку $[0; \frac{1}{30}]$;
- е) не принадлежит промежутку $[\frac{1}{20}; 1]$.

921. Установите, существует ли числовой промежуток, которому принадлежат все члены последовательности:

- а) $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots$;
- б) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \dots, 2n-1, \frac{1}{2n}, \dots$.

922. Запишите шесть первых членов и формулу n -го члена последовательности, заданной рекуррентной формулой:

- а) $c_1 = -4, c_{n+1} = c_n - 4$; в) $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1$;
- б) $d_1 = 4, d_{n+1} = \frac{1}{3}d_n$; г) $y_1 = 1, y_{n+1} = -ny_n$.

923. Задайте рекуррентно последовательность:

- а) $\frac{2}{3}, 6, \frac{2}{3}, 6, \frac{2}{3}, 6, \frac{2}{3}, 6$; б) $1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5$.

924. Вычислите три первых члена последовательности:

- а) $a_n = n(n+3)$; в) $a_n = 5 \cdot 2^n$;
- б) $a_n = 4^n$; г) $a_n = \sin \frac{\pi}{n}$.

925. Вычислите десятый и тридцать третий члены последовательности:

- а) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; в) $a_n = |n-15| - 5$;
- б) $a_n = \frac{n+9}{2n-1}$; г) $a_n = 10 - |n-20|$.

926. Вычислите седьмой член числовой последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 1 - 0,5a_n$ и условием $a_1 = 2$.

927. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 14, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3ab - 2b^2 = 30, \\ 3a - 2b = 10. \end{cases}$$

928. Найдите координаты точки:

- а) сумма координат которой равна 5 и через которую проходит график уравнения $x^2 + x + y = 30$;
- б) ордината которой равна удвоенной абсциссе и через которую проходит график уравнения $x^2 + 4y = 20$.

929. Установите, существует ли прямоугольный треугольник, сумма катетов и площадь которого соответственно равны:

- а) 60 см и 500 см^2 ; б) 60 см и 400 см^2 .

930. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{2y+3}{3y-2}, \\ y = \frac{x-4}{11-2x}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x-y} + x^2 = 1, \\ \frac{x^2}{x-y} = -2. \end{cases}$$

931. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 168, а наименьшее общее кратное равно 1001.

932. Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.

933. Турист прошел путь от А до В со скоростью 6 км/ч, а затем от В до С — со скоростью 3 км/ч. Найдите отношение $AB : BC$, учитывая, что средняя скорость движения составила 5 км/ч.

934. Катер по течению реки проходит путь от А до В за 5 ч, а назад возвращается за 7 ч. Определите, сколько времени будет плыть из А в В плот.

935. По шоссе со скоростью 60 км/ч едет колонна машин, которая растянулась на 1 км. Проезжая мимо поста ГАИ, каждая машина снижает свою скорость до 40 км/ч. Определите, какую длину будет иметь эта колонна после того, как все машины проедут пост ГАИ.



Рис. 353

936. Бомбей, Дели, Калькутта, Бангалор, Мадрас — самые большие города Индии (рис. 353). Население Бангалора относится к уменьшенному на 163 тыс. чел. населению Дели как $4:9$, а население Калькутты, уменьшенное на 5 тыс. чел. население Бомбея и увеличенное на 371 тыс. чел. население Мадраса — как $5:13:5$. Найдите население этих городов Индии, учитывая, что население Калькутты на 294 тыс. чел. больше населения Бангалора и относится к увеличенному на 4 тыс. чел. населению Бангалора как $467:438$.

* * *

937. Найдите те целые значения параметра a , при которых выражение $(x+a)(x-7)+2$ записывается произведением двух линейных множителей с целыми коэффициентами.

938. Докажите, что для целых чисел n и k выполняется тождество

$$\left[\frac{n}{k} \right] + \left[\frac{n+1}{k} \right] + \dots + \left[\frac{n+k-1}{k} \right] = n.$$

Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее число a .

939. Из острого угла A треугольника ABC проведена биссектриса AL , а из вершины B — высота BH . Найдите угол LHC , учитывая, что $\angle ALB = 45^\circ$.

22. Арифметическая прогрессия

Пример 1. Продолжительность календарного года принимается равной 365 суткам. Вместе с этим астрономический год, т. е. промежуток времени, за который Земля делает полный оборот вокруг Солнца, приблизительно равен $365 \frac{1}{4}$ сут (рис. 354). По этой причине каждые четыре года набегают погрешность в одни сутки, для учета которой к каждому четвертому году прибавляются сутки, и увеличенный год называют високосным. Високосными годами в третьем тысячелетии являются, например, годы

2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028.

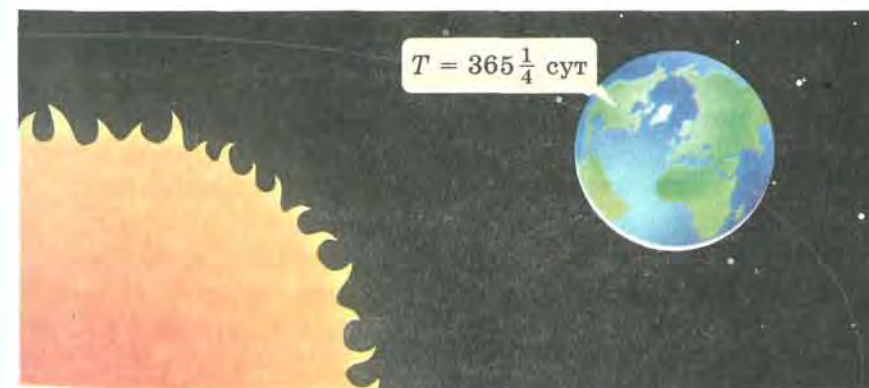


Рис. 354

Получили последовательность чисел, каждый член которой, начиная со второго, больше предыдущего на 4.

Числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

у которой для любого значения переменной n истинно равенство

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad (1)$$

где d — определенное число, называется **арифметической прогрессией**.

Число d называется **разностью арифметической прогрессии**.

Последовательность в примере 1 — арифметическая прогрессия с разностью 4.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, нужно знать ее первый член a_1 , разность d и количество всех членов.

Поскольку $a_{n+1} - a_n = d$, то понятно, что если разность d — положительное число, то арифметическая прогрессия (a_n) является возрастающей последовательностью, а если d — отрицательное число, то убывающей.

Теорема 1. *Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних членов.*

Доказательство. Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d . Тогда по определению арифметической прогрессии истинны равенства:

$$a_{n-1} = a_n - d \text{ и } a_{n+1} = a_n + d,$$

сложив которые покомпонентно, получим:

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_n + a_n - d + d,$$

или

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n.$$

Отсюда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Пусть последовательность (b_n) такова, что для любых ее трех последовательных членов b_{n-1} , b_n и b_{n+1} , где $n \geq 2$, истинно равенство

$$b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n+1}}{2}.$$

Тогда

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n+1},$$

или

$$b_n - b_{n-1} = b_{n+1} - b_n,$$

т. е. разность между любым членом последовательности (b_n) и предыдущим членом равна одному и тому же числу. А такая последовательность является арифметической прогрессией.

Пример 2. От вершины C данного угла на одной его стороне отложены равные друг другу отрезки $CA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_{n+1}, \dots$, на другой стороне этого угла также отложены равные друг другу отрезки $CB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n, B_nB_{n+1}, \dots$, и соответствующие концы отложенных отрезков соединены отрезками $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, A_nB_n, A_{n+1}B_{n+1}, \dots$ (рис. 355). Докажем, что эти отрезки образуют арифметическую прогрессию.

Рассмотрим четырехугольник $A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n$, который из-за параллельности сторон $A_{n-1}B_{n-1}$ и A_nB_n является трапецией, причем отрезок A_nB_n — его средняя линия. По свойству средней линии трапеции истинно равенство

$$A_nB_n = \frac{A_{n-1}B_{n-1} + A_{n+1}B_{n+1}}{2}.$$

В соответствии с теоремой 1 последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}, A_nB_n, A_{n+1}B_{n+1}, \dots$ является арифметической прогрессией.

Теорема 2. *n -й член арифметической прогрессии равен ее первому члену, увеличенному на произведение ее разности и количества предыдущих членов.*

Доказательство. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d . Тогда истинны равенства:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d,$$

$$a_4 = a_3 + d,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

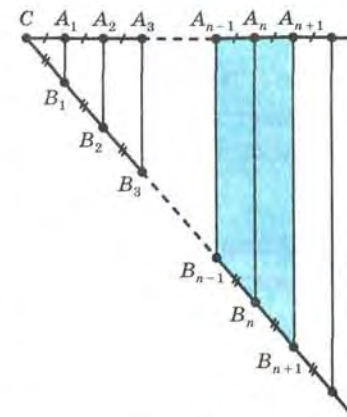


Рис. 355

Сложим покомпонентно эти $n - 1$ равенства:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + (n-1)d.$$

Заметим, что в обеих частях равенства есть одна и та же сумма $a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$. Поэтому

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Пример 3. Определим, является ли число 101 членом арифметической прогрессии

$$-42, -31, -20, -9, 2, \dots$$

Первый член этой прогрессии равен -42 . Найдем ее разность:

$$-31 - (-42) = 11.$$

Число 101 является членом прогрессии, если для некоторого натурального значения переменной n истинно равенство

$$101 = -42 + (n-1) \cdot 11.$$

Решим полученное уравнение:

$$101 = -42 + (n-1) \cdot 11;$$

$$101 = -42 + 11n - 11;$$

$$11n = 154;$$

$$n = 14.$$

Полученное значение переменной n — действительно натуральное число. Значит, число 101 является членом данной прогрессии, причем этот член имеет номер 14.

Следствие. Суммы любых пар членов арифметической прогрессии равны, если равны суммы их номеров.

Действительно, пусть имеется арифметическая прогрессия (a_n) с разностью d . Докажем, что если $m + p = k + s$, то $a_m + a_p = a_k + a_s$. Имеем:

$$a_m + a_p = a_1 + d \cdot (m-1) + a_1 + d \cdot (p-1) = 2a_1 + d \cdot (m+p-2),$$

$$a_k + a_s = a_1 + d \cdot (k-1) + a_1 + d \cdot (s-1) = 2a_1 + d \cdot (k+s-2).$$

Поскольку по условию $m + p = k + s$, то правые части равенств одинаковы, значит, одинаковы и левые части.

Теорема 3. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна полусумме крайних членов, умноженной на количество всех членов.

Доказательство. Обозначим S_n сумму n первых членов арифметической прогрессии. Запишем прогрессию один раз

по возрастанию номеров ее членов, другой раз — по убыванию этих номеров:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложим покомпонентно эти равенства:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Учитывая следствие из теоремы 2, получим, что суммы в каждой из n скобок одинаковы и равны $a_1 + a_n$. Поэтому

$$2S_n = (a_1 + a_n)n$$

и

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Пример 4. Построим восьмиугольник, учитывая, что если его углы записать по возрастанию, то каждый следующий будет больше предыдущего на 32° .

Найдем сначала сумму S_8 углов восьмиугольника:

$$S_8 = 180^\circ(8-2) = 1080^\circ.$$

Теперь обратим внимание на то, что записанные по возрастанию углы восьмиугольника образуют конечную арифметическую прогрессию, количество n членов которой равно 8.

Пусть самый меньший угол равен x° . Тогда самый больший угол равен $x^\circ + (8-1) \cdot 32^\circ$. Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии, можем записать уравнение

$$1080 = \frac{2x + (8-1) \cdot 32}{2} \cdot 8.$$

Решим его:

$$1080 = \frac{2x + (8-1) \cdot 32}{2} \cdot 8;$$

$$135 = x + 112;$$

$$x = 23.$$

Значит, меньший угол восьмиугольника равен 23° . Остальные углы найдем, учитывая, что они являются членами арифметической прогрессии с первым членом a_1 , равным 23° , и разностью d , равной 32° :

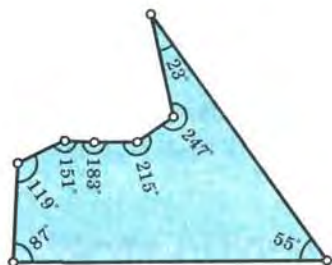


Рис. 356

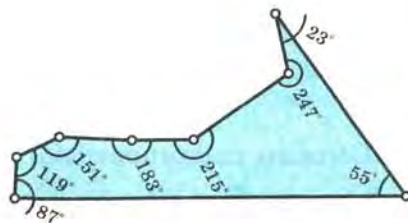


Рис. 357

$$\begin{aligned} a_2 &= 23^\circ + 32^\circ = 55^\circ; a_3 = 55^\circ + 32^\circ = 87^\circ; \\ a_4 &= 87^\circ + 32^\circ = 119^\circ; a_5 = 119^\circ + 32^\circ = 151^\circ; \\ a_6 &= 151^\circ + 32^\circ = 183^\circ; a_7 = 183^\circ + 32^\circ = 215^\circ; \\ a_8 &= 215^\circ + 32^\circ = 247^\circ. \end{aligned}$$

Найденные величины определяют бесконечно много восьмиугольников, два из которых приведены на рисунках 356 и 357.

- ? 1. Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
 2. Какое число называется разностью арифметической прогрессии?
 3. Как можно задать арифметическую прогрессию?
 4. При каком условии арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью; убывающей последовательностью?
 5. Какой зависимостью связаны три последовательные члены арифметической прогрессии?
 6. Сформулируйте признаки арифметической прогрессии.
 7. Запишите формулу для n -го члена арифметической прогрессии.
 8. Сформулируйте свойство членов арифметической прогрессии.
 9. Запишите формулу для суммы нескольких первых членов арифметической прогрессии.

940. Установите, является ли арифметической прогрессией конечная последовательность:

- а) 17, 27, 37, 47, 57; г) 2, 13, 24, 35;
 б) -19, -9, 9, 19, 29, 39; д) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}$;
 в) 2, 22, 222; е) $\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}$.

941. Выпишите шесть первых членов арифметической прогрессии, у которой:

- а) $a_1 = 10, d = 5$; б) $b_1 = 34, d = -5$.

942. Докажите, что если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то один из них равен 60° .

943. Найдите разность и седьмой член арифметической прогрессии, учитывая, что первый и второй ее члены соответственно равны:

- а) 50, 110; б) -20, -15; в) $\frac{3}{7}, \frac{11}{14}$.

944. Выразите разность d арифметической прогрессии (x_n) через:

- а) x_{11} и x_{12} ; б) x_7 и x_9 ; в) x_{20} и x_{23} ; г) x_{14} и x_{18} .

945. В арифметической прогрессии (u_n) известны два ее члена:

- а) $u_6 = 19$ и $u_8 = 25$. Найдите u_4, u_{10}, u_{17} ;
 б) $u_{11} = 16$ и $u_{13} = 6$. Найдите u_8, u_{12}, u_{47} .

946. Найдите пятнадцатый, сорок седьмой и n -й члены арифметической прогрессии:

- а) 5, 9, ...; в) $\frac{7}{12}, 1, \dots$;
 б) -8, -3, ...; г) $-\frac{7}{12}, -1, \dots$.

947. Арифметическая прогрессия (y_n) состоит из тридцати членов, причем $y_1 = -3,2$ и $d = 0,4$. Найдите сумму:

- а) первого и последнего членов;
 б) второго члена и предпоследнего;
 в) седьмого члена от начала и седьмого от конца;
 г) двух средних членов.

948. Найдите первый член c_1 арифметической прогрессии (c_n) , у которой:

- а) $c_{10} = 142, d = 12$; б) $c_{56} = -240, d = -4$.

949. Найдите разность d арифметической прогрессии (b_n) , у которой:

- а) $b_1 = 2, b_{10} = 184$; б) $b_1 = -7, b_{32} = 8$.

950. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, у которой:

- а) $t_5 = 27, t_{27} = 93$; в) $v_{20} = 0, v_{66} = -138$;
 б) $u_{47} = 74, u_{74} = 47$; г) $h_8 = 1, h_{25} = 11,9$.

968. Найдите первый и последний члены арифметической прогрессии, для которой:

а) $d = 3$, $S_{27} = 594$; б) $d = 2,5$, $S_{15} = 607,5$.

969. Найдите количество членов арифметической прогрессии и ее первый член, учитывая, что:

а) $d = 4$, $a_n = 51$, $S_n = 296$; б) $d = -2$, $a_n = 41$, $S_n = 624$.

970. Найдите сумму:

- а) всех натуральных чисел от 1 до 200;
- б) первых n четных чисел;
- в) первых n нечетных чисел;
- г) трехзначных чисел, кратных 4.

971. Найдите сумму:

- а) первых семидесяти натуральных чисел;
- б) всех трехзначных чисел;
- в) всех нечетных чисел, меньших 160;
- г) всех четырехзначных чисел, кратных 7;
- д) всех трехзначных чисел, не кратных 10;
- е) всех трехзначных чисел, не кратных 5 и 7.

972. По шоссе в одном направлении движутся грузовой и легковой автомобили. Теперь их разделяет 297 м и их скорости составляют 10 м/с и 12 м/с соответственно. Установите, через какое время машины поравняются, учитывая, что скорость грузового автомобиля возрастает за секунду на 0,1 м/с, а ускорение легкового автомобиля равно 0,2 м/с².

973. Шары сложены в форме треугольника так, что в первом ряду — 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и т. д. (рис. 359). Найдите:



Рис. 359

- а) в скольких рядах расположены шары, если их всего 120;
- б) сколько нужно шаров, чтобы сложить треугольник из тридцати рядов.

974. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость, и через 20 мин она становится равной 60 км/ч. Найдите ускорение поезда.

975. Боковая сторона трапеции с основаниями, равными 26 см и 11 см, разделена на 10 долей, и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям. Найдите сумму длин всех параллельных отрезков, заключенных между боковыми сторонами трапеции.

976. Найдите:

- а) через сколько секунд свободного падения камень упадет на дно шахты глубиной 80 м;
- б) глубину шахты, учитывая, что свободно падающее тело достигло ее дна через 5 с после начала падения.

977. Найдите сумму $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \dots + 2^2 - 1$.

978. Найдите сумму первых двадцати нечетных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1.

979. Докажите, что выражения $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии и найдите сумму ее n членов.

980. Докажите, что данные числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии:

- а) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin \alpha \cos \beta$, $\sin(\alpha - \beta)$;
- б) $\cos 2\alpha$, $\cos^2 \alpha$, 1;
- в) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos \alpha \cos \beta$, $\cos(\alpha - \beta)$;
- г) $\sin 5\alpha$, $\sin 3\alpha \cos 2\alpha$, $\sin \alpha$.

981. Если к членам одной арифметической прогрессии прибавить удвоенные соответствующие по номерам члены другой арифметической прогрессии, то будет ли полученная последовательность арифметической прогрессией?

982. Есть арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Установите, является ли арифметической прогрессией последовательность:

- а) $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}, \dots$; г) $-2a_1, -2a_2, \dots, -2a_n, \dots$;
- б) $a_4, a_8, \dots, a_{4n}, \dots$; д) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$;
- в) $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_n + 1, \dots$; е) $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2, \dots$.

983. Сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n) равна S_n . Найдите:

- а) первые четыре члена прогрессии, учитывая, что $S_n = \frac{n^2}{4} - n$;
- б) первый член и разность прогрессии, учитывая, что $S_n = 2n^2 + 3n$.

984. Докажите, что:

а) если числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию, то числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию;

б) если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ образуют арифметическую прогрессию, то числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

985. Докажите, что если числа a, b и c являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, то истинно равенство $\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + c^2(a+b)$.

986. Докажите тождество

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \frac{1}{a_3 a_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_2} + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right),$$

где $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — члены арифметической прогрессии.

987. Найдите сумму первых 50 общих членов арифметических прогрессий 9, 12, 15, 18, ... и 8, 12, 16, 20, ...

988. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, учитывая, что $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ и $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$.

989. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, учитывая, что $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ и $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$.

990. Установите, могут ли числа 1, $\sqrt{3}$, 3 быть членами арифметической прогрессии.

991. Докажите, что никакие три последовательных члена последовательности (a_n) не образуют арифметическую прогрессию, если:

а) $a_n = n^2$; б) $a_n = \sqrt{n}$; в) $a_n = \frac{1}{n}$.

992. Упростите выражение $\frac{9a^5 b^{-1}}{c^2} : \frac{6a^4 c^{-2}}{b^2}$.

993. Найдите значение выражения:

а) $\frac{0,04^{-2} \cdot 125^4 \cdot 0,2^{-1}}{4 \cdot 25^8}$; б) $\frac{3^{10} \cdot 7^{-5} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{21}\right)^8 \cdot 49}$.

994. Установите, существует ли прямоугольник, у которого периметр и площадь соответственно равны:

а) 40 см и 84 см^2 ; б) 40 см и 105 см^2 .

995. Над заказом некоторое время работал мастер с производительностью 16 деталей в час, а затем выполнение заказа заканчивал ученик, работавший с производительностью 7 деталей в час. Найдите время работы над заказом мастера и ученика в отдельности, учитывая, что средняя производительность оказалась равной 11 деталям в час и мастер обработал на 29 деталей больше.

996. Точка M выбрана на отрезке AB , и на его частях MA и MB по одну сторону от прямой AB построены такие треугольники MAP и MBQ , что площадь первого на 101 см^2 меньше. По другую сторону от прямой AB построен треугольник ABR с площадью, равной сумме площадей треугольников MAP и MBQ (рис. 360). Найдите длины отрезков MA и MB , учитывая, что высоты треугольников ABR , MAP и MBQ , проведенные к прямой AB , соответственно равны 15 см, 8 см и 19 см.

997. Одно тело движется с ускорением 5 м/с^2 , другое — с ускорением 4 м/с^2 , при этом на первое тело действует сила, на 5,6 Н большая. Найдите массы тел, учитывая, что если бы на третье тело с массой, равной общей массе данных тел, действовала сила, равная сумме данных сил, то третье тело двигалось бы с ускорением, равным $4,6 \text{ м/с}^2$.

998. Есть две коробки для укладывания конфет, причем в первой из них в одном ряду укладывается 9 конфет, во второй — 6 конфет и вторая коробка вмещает на 9 конфет больше. Найдите вместимость коробок, учитывая, что все конфеты из первой и второй коробок точно укладываются в третью коробку, у которой в одном ряду 7 конфет, а всего в трех разных коробках меньше 150 конфет.

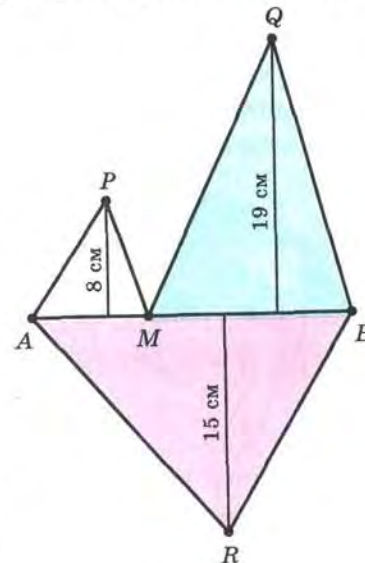


Рис. 360

999. Решите уравнение $20 \{x\} = 7 [x]$, где $[x]$ обозначает наибольшее целое число x , не превосходящее x , а $\{x\} = x - [x]$.

1000. Найдите все функции f , для которых условие $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$ истинно при всех действительных значениях переменных x и y .

1001. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Через точку M к описанной около треугольника BMC окружности проведена касательная, которая пересекает сторону AB в точке N . Докажите, что прямая AC касается описанной около треугольника BMN окружности.

23. Геометрическая прогрессия

Числовая последовательность (a_n) , у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на определенное, не равное нулю число q , называется **геометрической прогрессией**.

Число q называется **знаменателем геометрической прогрессии**.

Геометрическая прогрессия определена, если известен ее первый член a_1 , знаменатель q и количество членов. Члены геометрической прогрессии связаны условием

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

где q — определенное число.

Пример 1. В окружность вписан квадрат, в который вписана вторая окружность. Во вторую окружность вписан квадрат, а в него — третья окружность и т. д. (рис. 361). Дока-

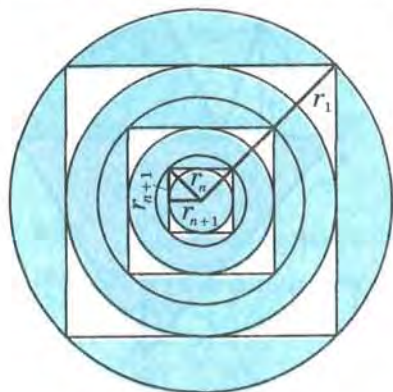


Рис. 361

жем, что радиусы окружностей являются последовательными членами геометрической прогрессии. Обозначим $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots$ радиусы первой, второй и следующих окружностей. Радиусы r_n и r_{n+1} n -й и $(n+1)$ -й окружностей и половина стороны n -го квадрата, проведенные так, как показано на рисунке 361, образуют равнобедрен-

ный прямоугольный треугольник. Поэтому по теореме Пифагора получим, что

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2.$$

Отсюда

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ или } r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n.$$

Видим, что радиус каждой следующей окружности получается из радиуса предыдущей умножением на число $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому утверждаем, что последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots$ радиусов окружностей является геометрической прогрессией.

Теорема 4. *Последовательность (a_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов.*

Доказательство. Пусть последовательность (a_n) является геометрической прогрессией со знаменателем q . Тогда с учетом определения геометрической прогрессии будем иметь:

$$a_{n-1}a_{n+1} = \frac{a_n}{q} \cdot a_n q = a_n^2.$$

Пусть последовательность (b_n) такова, что для любых ее трех последовательных членов b_{n-1}, b_n и b_{n+1} , где $n \geq 2$, истинно равенство

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Тогда

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Поскольку отношение любого члена последовательности к предыдущему члену одно и то же, то такая последовательность является геометрической прогрессией.

Теорема 5. *n -й член геометрической прогрессии равен произведению ее первого члена и степени знаменателя, показатель которой равен количеству предыдущих членов.*

Доказательство. Пусть (a_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q . Тогда истинны равенства:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q, \\ a_3 &= a_2 \cdot q, \\ a_4 &= a_3 \cdot q, \\ &\dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

После покомпонентного умножения этих $n - 1$ равенств, получим

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

или, после сокращения на общий множитель $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Пример 2. Известно, что число 1701 — член геометрической прогрессии

$$7, 21, 63, \dots$$

Найдем номер этого члена. По первому и второму членам прогрессии находим ее знаменатель:

$$21 : 7 = 3.$$

Теперь используем установленную формулу n -го члена геометрической прогрессии:

$$1701 = 7 \cdot 3^{n-1}.$$

Далее получим:

$$\begin{aligned} 3^{n-1} &= 1701 : 7; \\ 3^{n-1} &= 243; \\ 3^{n-1} &= 3^5; \\ n - 1 &= 5; \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Полученное значение переменной n — натуральное число. Значит, число 1701 является членом данной прогрессии с номером 6.

Следствие. Произведения пар членов геометрической прогрессии равны, если равны суммы их номеров.

Действительно, пусть (a_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q и $m + p = k + s$. Докажем, что $a_m \cdot a_p = a_k \cdot a_s$. С учетом теоремы 5 имеем:

$$\begin{aligned} a_m \cdot a_p &= (a_1 \cdot q^{m-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{p-1}) = a_1^2 \cdot q^{m+p-2}, \\ a_k \cdot a_s &= (a_1 \cdot q^{k-1}) \cdot (a_1 \cdot q^{s-1}) = a_1^2 \cdot q^{k+s-2}. \end{aligned}$$

Теорема 6. Если знаменатель q геометрической прогрессии (a_n) не равен единице, то сумму S_n первых n ее членов можно найти по формуле

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

т. е. сумма n ее первых членов равна произведению первого члена и дроби, числитель которой есть уменьшенная на единицу n -я степень знаменателя прогрессии, а знаменатель — уменьшенный на единицу знаменатель прогрессии.

Доказательство. Обозначим S_n сумму первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на q :

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Вычтем покомпонентно из второго равенства первое:

$$S_n q - S_n = a_1 q^n - a_1.$$

Значит,

$$S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1).$$

Если $q \neq 1$, то:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

- ?**
1. Какая числовая последовательность называется геометрической прогрессией?
 2. Какое число называется знаменателем геометрической прогрессии?
 3. Какими условиями задается геометрическая прогрессия?
 4. Какой зависимостью связаны три последовательные члены геометрической прогрессии?
 5. Сформулируйте признаки геометрической прогрессии.
 6. Запишите формулу для n -го члена геометрической прогрессии.
 7. Сформулируйте свойство членов геометрической прогрессии.
 8. Запишите формулу для суммы нескольких первых членов геометрической прогрессии.

1002. Определите, является ли геометрической прогрессией конечная последовательность:

- | | |
|---|--|
| а) 1000; 100; 10; 1; 0,1; | г) -1; 10; -100; 1000; |
| б) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; | д) 1; 1,1; 1,11; 1,111; |
| в) $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{3}$; 3; 27; 81; | е) 7^{-2} ; 7^{-1} ; 7^0 ; 7^1 ; 7^2 . |

Если является, то чему равен ее знаменатель?

1003. Найдите шесть первых членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $a_1 = 7, q = 2$; б) $a_1 = \frac{3}{8}, q = \frac{2}{3}$; в) $a_1 = 0,8, q = \sqrt{2}$.

1004. Установите, какой прогрессией — арифметической или геометрической — является последовательность, для которой:

а) $a_1 = 4, a_{n+1} = 5a_n$; в) $c_1 = -81, c_{n+1} = \frac{2}{3} + c_n$;

б) $b_1 = 4, b_{n+1} = 5 + b_n$; г) $z_1 = -81, z_{n+1} = \frac{2}{3} z_n$.

1005. Найдите знаменатель и четвертый член геометрической прогрессии, два первых члена которой следующие:

а) 3, 18; в) 7, -14; д) $3\sqrt{3}, 9$;

б) 20, 4; г) -30, -15; е) $\frac{1}{5\sqrt{5}}, 1$.

1006. Найдите два первых члена геометрической прогрессии, третий и четвертый члены которой следующие:

а) 24, 36; б) 225, -135.

1007. Первый член геометрической прогрессии (t_n) и ее знаменатель соответственно равны 512 и 2^{-1} . Найдите:

а) t_5 ; в) t_{12} ; д) t_n ; ж) t_{5k} ;

б) t_7 ; г) t_{16} ; е) t_{k-6} ; з) t_{5k-6} .

1008. Выразите знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) через:

а) b_1 и b_2 ; б) b_1 и b_4 ; в) b_k и b_{k+5} .

1009. Запишите n -й член геометрической прогрессии, первый член и знаменатель которой, а также номер члена n соответственно равны:

а) $162, \frac{1}{3}$ и 7; в) 0,625, -2 и 7;

б) $8\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 9; г) 0,03, $\sqrt{10}$ и 8.

1010. Найдите сумму, в которую превратится вклад в 1 млн р., положенный в банк на 4 года под 5 % годовых.

1011. Некоторые бактерии, помещенные в питательную среду, делятся пополам каждые 20 мин. Установите, сколько из одной бактерии будет бактерий через:

а) 1 ч; б) 10 ч; в) 20 ч; г) сутки.

1012. На опытном лесном участке ежегодный прирост древесины составляет 10 %. Теперь на участке $3,0 \cdot 10^4$ м³ древесины. Найдите, сколько будет древесины через:

а) 3 года; б) 6 лет; в) 9 лет; г) 12 лет.

1013. Задайте геометрическую прогрессию, выписав формулу ее n -го члена, учитывая, что:

а) $y_1 = 5, y_{n+1} = 3y_n$; в) $z_1 = 49, z_{n+1} = 7z_n$;

б) $a_1 = 3, a_{n+1} = -3a_n$; г) $u_1 = 24, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$.

1014. Найдите геометрическую прогрессию, учитывая, что:

а) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}. \end{cases}$

1015. Докажите, что последовательность является геометрической прогрессией, если ее n -й член задан формулой:

а) $c_n = 7^n$; б) $s_n = 7 \cdot 3^n$; в) $r_n = 8 \cdot 7^{n+3}$.

1016. Установите, при каких условиях геометрическая прогрессия будет возрастающей последовательностью, при каких — убывающей, при каких — не возрастающей, не убывающей.

1017. Найдите номер члена геометрической прогрессии, для которой:

а) $a_1 = 2, q = 3, a_n = 486$;

б) $b_1 = 1280, q = \frac{1}{2}, b_n = 10$;

в) $c_1 = 1, q = \frac{2}{3}, c_n = \frac{16}{81}$;

г) $e_1 = 3, q = 0,1, e_n = 0,000003$.

1018. Между числами:

а) 1 и 16 вставьте три таких числа, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию;

б) 60 и $\frac{15}{16}$ вставьте пять таких чисел, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

1019. Установите, будет ли геометрической прогрессией последовательность, полученная умножением членов одной геометрической прогрессии на соответствующие по номерам члены другой геометрической прогрессии.

1020. Установите, в каком случае последовательность, полученная сложением членов одной геометрической прогрессии с соответствующими по номерам членами другой геометрической прогрессии, будет геометрической прогрессией.

1021. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, для которой:

- а) $x_1 = 16, q = \frac{1}{2}$; в) $y_1 = -18, q = \frac{1}{3}$;
б) $a_1 = 5, q = -2$; г) $b_1 = -1, q = -10$.

1022. Есть геометрическая прогрессия (b_n) . Установите, будет ли геометрической прогрессией последовательность:

- а) $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n, \dots$; г) $b_1 - 1, b_2 - 1, \dots, b_n - 1, \dots$;
б) $b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}, \dots$; д) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}, \dots$;
в) $b_1, b_5, \dots, b_{4n-3}, \dots$; е) $b_1^3, b_2^3, \dots, b_n^3, \dots$.

1023. Установите, могут ли три последовательных члена геометрической прогрессии образовывать арифметическую прогрессию.

1024. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, для которой:

- а) $b_1 = -3, q = 4, n = 6$; б) $t_1 = -64, q = -\frac{1}{2}, n = -11$.

1025. Докажите, что сумму S_n первых n членов геометрической прогрессии (a_n) со знаменателем q можно найти по формуле

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}.$$

1026. Представьте дробью выражение:

- а) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, где $x \neq 1$;
б) $1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6$, где $y \neq -1$.

1027. В таблице указаны сведения о геометрической прогрессии. Выполнив необходимые вычисления, найдите недостающие числа таблицы:

a_1	q	a_n	n	S_n
180	$\frac{1}{3}$		5	
2		1458	7	
	-3	121,5	4	
	2	96		189

1028. Найдите сумму:

- а) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$;
б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{10}}$;
в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{10}}$;
г) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{12}$;

д) $1 + a + a^2 + \dots + a^{100}$;

е) $b - b^3 + b^5 - \dots + b^{13}$.

1029. Есть три числа, образующие арифметическую прогрессию, и их сумма равна 30. Если из первого из них вычесть 5, из второго — 4, а третье оставить без изменения, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

1030. Числа, выражающие в метрах длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, являются последовательными членами геометрической прогрессии. Площадь основания параллелепипеда равна 108 м^2 , а площадь поверхности — 312 м^2 . Найдите измерения параллелепипеда.

1031. Есть геометрическая прогрессия (b_n) . Найдите:

- а) b_1 и n , учитывая, что $q = 0,5, b_n = 2, S_n = 254$;
б) b_5 и n , учитывая, что $q = 3, b_n = 567, S_n = 847$;
в) b_1 и b_n , учитывая, что $q = 2, n = 8, S_n = 765$;
г) q и n , учитывая, что $b_1 = 2, b_n = \frac{1}{8}, S_n = 3\frac{7}{8}$.

1032. Докажите, что последовательность (x_n) является геометрической прогрессией, если:

- а) $x_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; в) $x_n = 0,1 \cdot 10^n$;
б) $x_n = -3^n$; г) $x_n = 2b^n$, где $b \neq 0$.

1033. Докажите, что если q — знаменатель геометрической прогрессии (c_n) , то $\frac{c_p}{c_r} = q^{p-r}$.

1034. Есть геометрическая прогрессия (y_n) , сумму n первых членов которой можно вычислить по формуле:

а) $S_n = 2(5^n - 1)$. Найдите S_4, y_1, y_4 .

б) $S_n = 3,5(4^n - 1)$. Найдите y_1, q, S_5 .

1035. Докажите, что если сумму n первых членов последовательности (a_n) можно найти по формуле $S_n = 3^n - 1$, то (a_n) — геометрическая прогрессия.

1036. Установите, является ли геометрической прогрессией последовательность, сумму первых n членов которой можно найти по формуле:

а) $S_n = n^2 - 1$; б) $S_n = 2^n - 1$; в) $S_n = 3^n + 1$.

1037. Упростите выражение:

а) $\frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1}$; б) $\frac{a^{11} + a^{10} + a^9 + \dots + a + 1}{a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}$.

1038. Сократите дробь:

а) $\frac{1 + a + a^2 + a^3 + a^4}{a^{10} - 1}$; б) $\frac{1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{20}}{1 + x + x^2 + \dots + x^{21}}$;
в) $\frac{t^{14} - 1}{t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}$; г) $\frac{b^6 - b^5 + b^4 - b^3 + b^2 - b + 1}{b^{13} + b^{12} + b^{11} + \dots + b + 1}$.

1039. Сократите дробь:

а) $\frac{1 + a + a^2 + \dots + a^{13} + a^{14}}{1 + a + a^2 + a^3 + a^4}$; б) $\frac{1 - y + y^2 - \dots + y^{18} - y^{19} + y^{20}}{1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + y^6}$.

1040. Найдите три числа, которые образуют:

- а) арифметическую прогрессию, сумма которых равна 30, а если из второго ее члена вычесть 2, а остальные оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия;
б) геометрическую прогрессию, сумма которых равна 93, а если из первого ее члена вычесть 48, а остальные оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия.

1041. Установите, образуют ли геометрическую прогрессию выражения:

а) $2^x, 2^{2x}, 2^{3x}$; б) $2^{x^2}, 2^{2x^2}, 2^{3x^2}$.

1042. Докажите, что значения функции:

- а) $\operatorname{tg} \alpha$ от углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию;
б) $\operatorname{ctg} \alpha$ от углов $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ образуют убывающую геометрическую прогрессию.

1043. Найдите две неизвестные характеристики геометрической прогрессии по трем ее характеристикам, данным в каждой строчке следующей таблицы:

	a_1	q	n	a_n	S_n
а)	-2		6	-486	
б)		$-\frac{1}{2}$	8		$1\frac{21}{64}$
в)	9			$\frac{64}{81}$	$25\frac{34}{81}$
г)	-2	$-1\frac{1}{2}$			$8\frac{5}{16}$

	a_1	q	n	a_n	S_n
д)		$\frac{1}{2}$		2	254
е)	15		3		$21\frac{2}{3}$
ж)			3	18	26
з)		$1\frac{1}{2}$	6	$2\frac{17}{32}$	

1044. Определите, начиная с какого номера члены геометрической прогрессии $-8, 4, -2, \dots$ по модулю меньше 0,001.

1045. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, учитывая, что:

а) $\begin{cases} a_4 - a_2 = 18, \\ a_5 - a_3 = 36, \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1 - a_3 + a_5 = -65, \\ a_1 + a_7 = -325. \end{cases}$

1046. Найдите первый член, знаменатель и количество членов геометрической прогрессии, учитывая, что:

а) $\begin{cases} a_7 - a_4 = -216, \\ a_5 - a_4 = -72, \\ S_n = 1023; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a_1 + a_5 = 17, \\ a_2 + a_6 = 34, \\ S_n = 31. \end{cases}$

1047. Есть геометрическая прогрессия с положительными членами, причем $S_2 = 4$, а $S_3 = 13$. Найдите S_5 .

1048. Разность шестого и четвертого членов геометрической прогрессии равна 72, а третьего и первого — 9. Найдите сумму восьми членов этой прогрессии.

1049. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, которая состоит из шести членов, учитывая, что сумма трех первых членов в 8 раз меньше суммы трех последних членов.

1050. Найдите четыре числа, которые образуют убывающую геометрическую прогрессию, учитывая, что сумма ее крайних членов равна $11\frac{2}{3}$, а сумма средних — 10.

1051. Найдите геометрическую прогрессию, которая состоит из шести членов, учитывая, что сумма членов, стоящих на четных местах, равна 99,75, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, — 66,5.

1052. Докажите, что если числа a , b , c и d образуют геометрическую прогрессию, то они удовлетворяют равенству:

а) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$;

б) $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$;

в) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

1053. Найдите геометрическую прогрессию, сумма первых трех членов которой равна:

а) 13, а сумма квадратов тех же членов — 91;

б) 13, а их произведение — 27.

1054. Найдите три числа, которые образуют:

а) арифметическую прогрессию с суммой 57, а если из второго числа вычесть единицу, к третьему прибавить единицу, то числа образуют геометрическую прогрессию;

б) геометрическую прогрессию, их сумма равна 28, а если большее из чисел уменьшить на 4, то числа образуют арифметическую прогрессию;

в) геометрическую прогрессию, их сумма равна 42 и они являются первым, вторым и шестым членами возрастающей арифметической прогрессии.

1055. Три числа, сумма которых равна 19,5, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии и вместе с этим — вторым, восьмым и двадцать третьим членами арифметической прогрессии. Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии.

1056. Первый и третий члены арифметической прогрессии соответственно равны первому и третьему членам геометрической прогрессии, а второй член арифметической прогрес-

сии превышает второй член геометрической прогрессии на 0,25. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, учитывая, что первый ее член равен 2.

1057. Сумма трех чисел, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию, равна 51. Если из них вычесть соответственно 1, 7 и 8, то получится три числа, которые образуют геометрическую прогрессию. Определите, сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равной 555.

1058. Сумма трех чисел, которые образуют геометрическую возрастающую прогрессию, равна 65. Если из этих чисел вычесть соответственно 1, 8, 35, то получатся три числа, которые образуют арифметическую прогрессию. Определите, сколько членов геометрической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равной 200.

1059. Три числа, сумма которых равна 76, можно рассматривать как три последовательных члена геометрической прогрессии или как первый, четвертый и шестой члены арифметической прогрессии. Определите, сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равной 176.

1060. Сумма трех первых членов убывающей арифметической прогрессии равна 54. Если ее первый член оставить без изменения, второй уменьшить на 9, а третий — на 6, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите арифметическую прогрессию.

1061. Докажите, что рациональным числом является значение выражения:

а) $(5 + 2\sqrt{6})^2 + (5 - 2\sqrt{6})^2$;

б) $(\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}})^2$.

1062. Докажите, что значение выражения:

а) $17^3 - 11^3$ кратно 6;

д) $66^3 + 34^3$ кратно 400;

б) $61^3 + 19^3$ кратно 16;

е) $54^3 - 24^3$ кратно 1080;

в) $41^3 + 19^3$ кратно 60;

ж) $219^5 - 108^5$ кратно 37;

г) $79^3 - 29^3$ не кратно 100;

з) $34^7 + 41^7$ кратно 25.

1063. Найдите значение выражения:

- а) $\left(\frac{97^3 + 83^3}{180} - 97 \cdot 83\right) : (35^2 - 28^2);$
 б) $\left(\frac{79^3 - 41^3}{38} + 79 \cdot 41\right) : (133,5^2 - 58,5^2).$

1064. Упростите выражение:

- а) $\frac{\sqrt{p^3} - 8}{\sqrt{p} - 2};$ г) $\frac{n\sqrt{n} - 10\sqrt{10}}{n + \sqrt{10n} + 10};$
 б) $\frac{c + \sqrt{c} + 1}{\sqrt{c^3} - 1};$ д) $\frac{a - 25}{a\sqrt{a} - 125};$
 в) $\frac{x\sqrt{x+y}\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y};$ е) $\frac{b\sqrt{b} + c\sqrt{c}}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + \sqrt{bc}}.$

1065. Двое рабочих выполнили определенный заказ за 12 дней. Если бы сначала первый выполнил половину заказа, а потом второй заканчивал работу, то это заняло бы 25 дней. За сколько дней каждый из рабочих мог бы выполнить весь этот заказ?

1066. Два токаря должны были обработать определенное количество деталей. После того как 3 ч они работали вместе, второй работал один еще 4 ч. В результате задание оказалось перевыполненным на 12,5 %. Определите, за какое время мог бы выполнить все задания каждый токарь, учитывая, что второму для этого понадобилось бы на 4 ч меньше.

1067. Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск, Нижний Новгород, Екатеринбург — самые большие города России (рис. 362). Население Санкт-Петербурга таково, что оно относится к населению Екатеринбурга как 11 : 3, к населению Новосибирска — как 420 : 127, к населению Москвы — как 385 : 698. Найдите население этих городов России, учитывая, что население Москвы в шесть раз больше увеличенного на 50 тыс. чел. населения Нижнего Новгорода, а население Санкт-Петербурга на 582 тыс. чел. больше утроенного населения Нижнего Новгорода.

* * *

1068. Есть правильный треугольник ABC . На продолжении стороны AC за точку C взята точка M , а на продолжении стороны BC за точку C — точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.



Рис. 362

1069. Докажите, что число $(1 + \sqrt{5})^{100} + (1 - \sqrt{5})^{100}$ является целым.

1070. Последовательность (a_n) задается своим первым членом $a_1 = 1$ и условием $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$. Найдите a_{2007} .

24. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Пример 1. Рассмотрим квадрат со стороной 1 (рис. 363). Если середины его противоположных сторон соединить отрезком, то образуются два прямоугольника с площадью $\frac{1}{2}$. Если теперь середины одного из полученных прямоугольников соединить отрезком, то получится два прямоугольника с площадью $\frac{1}{4}$. Снова повторив такое действие, получим два прямоугольника с площадью $\frac{1}{8}$. Будем продолжать этот процесс далее. В результате получим бесконечную убывающую последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots,$$

у которой каждый следующий член получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{2}$. Естественно считать, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

равна 1, так как она представляет площадь всего данного квадрата.

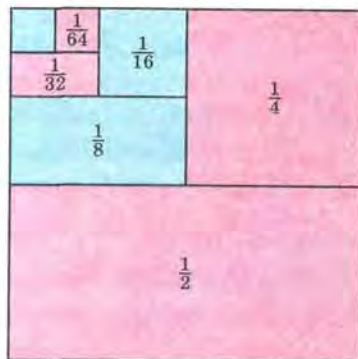


Рис. 363

Записанная сумма содержит бесконечно много слагаемых. Рассмотрим ее часть S_n из n слагаемых:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Ее компоненты образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

С возрастанием значения переменной n значение выражения $\frac{1}{2^n}$ становится все меньше и меньше: значение переменной n всегда можно подобрать так, что значение выражения $\frac{1}{2^n}$ станет меньше любого малого заранее выбранного числа. Поэтому бесконечную сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$ считают равной 1.

Рассмотрим теперь бесконечную геометрическую прогрессию

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots, a_1q^{n-1}, \dots, \text{ где } |q| < 1.$$

Для таких прогрессий истинно условие $|a_1q^k| > |a_1q^{k+1}|$, их называют **бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями**.

Суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (a_n) со знаменателем q называется число $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Это определение объясняется тем, что с увеличением n число S все меньше отличается от суммы первых n членов этой прогрессии. Действительно,

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} q^n.$$

Поскольку $|q| < 1$, то q^n с увеличением n приближается к нулю, а значит, приближается к нулю и вычитаемое $\frac{a_1}{1-q} q^n$.

Поэтому сумма S_n приближается к $\frac{a_1}{1-q}$.

Пример 2. Найдём значение суммы

$$27 - 18 + 12 - 8 + \frac{16}{3} - \dots$$

Замечаем, что слагаемые этой алгебраической суммы являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1 = 27$ и $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-18}{27} = -\frac{2}{3}$. Поэтому

$$S = \frac{27}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{27}{\frac{1}{3}} = 81.$$

Мы знаем, что любое рациональное число можно представить десятичной дробью. При этом если разложение на простые множители знаменателя несократимой дроби, представляющей данное рациональное число, содержит только двойки и пятерки, то получается конечная десятичная дробь, а если это разложение содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Например:

$$\begin{aligned}\frac{37}{80} &= \frac{37}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \\ &= \frac{37 \cdot 125}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{4625}{10\,000} = 0,4625; \\ \frac{37}{41} &= 0,(90243); \quad \frac{37}{328} = 0,112(80487).\end{aligned}$$

Повторяющаяся группа цифр называется **периодом** десятичной дроби, группа цифр между целой частью и периодом называется **предпериодом**. В записи 0,112(80487) предпериод равен 112, а период — 80487.

Обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную делением ее числителя на знаменатель. Установим алгоритмы преобразования бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную.

В дальнейшем мы будем пользоваться записью вида $\overline{b_s \dots b_2 b_1}, \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$. Она обозначает десятичную дробь, целая часть которой записана с помощью цифр $b_1, b_2, \dots, b_s$, а дробная — с помощью цифр $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Теорема 7. Бесконечная периодическая десятичная дробь без предпериода равна обыкновенной дроби, числитель которой есть число, записанное цифрами периода, а знаменатель — число, записанное столькоими девятками, сколько есть цифр в периоде.

► **Доказательство.** Пусть $0,(\overline{a_1 a_2 \dots a_k})$ — периодическая десятичная дробь, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — цифры периода. Тогда число $0,(\overline{a_1 a_2 \dots a_k})$ можно представить бесконечной суммой:

$$0,(\overline{a_1 a_2 \dots a_k}) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{2k \text{ нулей}}} + \dots + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{nk \text{ нулей}}} + \dots,$$

в которой каждое слагаемое получается из предыдущего умножением

на $\frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$. Это означает, что бес-

конечную периодическую дробь можно рассматривать как сумму S членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым

членом $\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$ и знаменателем $\frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}$. Поэтому

$$\begin{aligned}S &= \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} : \left(1 - \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}\right) = \\ &= \left(\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}\right) : \left(\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} - 1\right) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ девяток}}}.\end{aligned}$$

Теорема 7 обосновывает алгоритм представления обыкновенной дроби бесконечной периодической десятичной дроби без предпериода, который изображен схемой, приведенной на рисунке 364.

Пример 3. Представим обыкновенную дробь десятичную дробь 0,(9504). Имеем:

$$0,(9504) = \frac{9504}{9999} = \frac{1056}{1111} = \frac{96}{101}.$$

Теорема 8. Бесконечная десятичная периодическая дробь с предпериодом равна обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами от десятичной запятой до конца первого периода, и числом, записанным цифрами предпериода, а знаменатель — числу, записанному столькоими девятками, сколько есть цифр в периоде, и столькоими нулями, сколько есть цифр в предпериоде.

► **Доказательство.** Пусть $0,\overline{a_1 a_2 \dots a_k}(\overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+l}})$ — периодическая десятичная дробь, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — цифры предпериода, $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+s}$ — цифры периода. Тогда число $0,\overline{a_1 a_2 \dots a_k}(\overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+l}})$ можно представить суммой

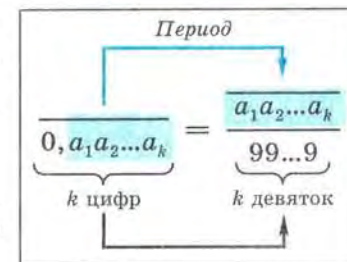


Рис. 364

$$0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})} = 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + \\ + 0, \overline{00 \dots 0 (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s})},$$

или, с учетом теоремы 7, суммой

$$\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \frac{\overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}}{\underbrace{100 \dots 0 - 1}_{s \text{ нулей}}}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} + \frac{1}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}}} \cdot \frac{\overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}}{\underbrace{100 \dots 0 - 1}_{s \text{ нулей}}} = \\ & = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot \left(\frac{s \text{ нулей}}{100 \dots 0 - 1} \right) + \overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} \cdot \left(\frac{s \text{ нулей}}{100 \dots 0 - 1} \right)} = \\ & = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k} \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{s \text{ нулей}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k} + \overline{a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}}}{\underbrace{100 \dots 0}_{k \text{ нулей}} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{s \text{ девяток}}} = \\ & = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+s}} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_{s \text{ девяток}} \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ нулей}}}. \end{aligned}$$

Теорема 8 обосновывает алгоритм представления обыкновенной дробью бесконечной периодической десятичной дроби с предпериодом, который отражен на схеме, представленной на рисунке 365.

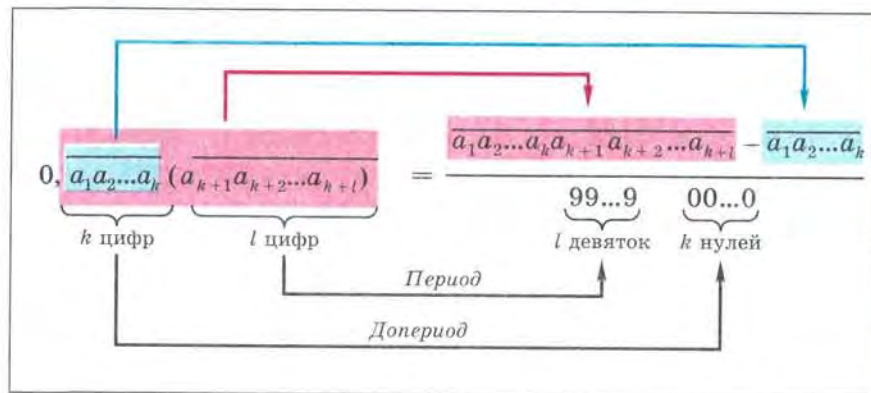


Рис. 365

Пример 4. Представим обыкновенной дробью десятичную дробь 0,3213(513). Имеем:

$$0,3213(513) = \frac{3213513 - 3213}{999000} = \frac{3210300}{999000} = \frac{32103}{99900} = \frac{3567}{11100} = \frac{1189}{3700}.$$

- ?
1. Что происходит со значением выражения r^n , где $|r| < 1$, если значение переменной n неограниченно увеличивать?
 2. Какое число называют суммой членов бесконечно убывающей геометрической последовательности?
 3. Какое рациональное число можно представить конечной десятичной дробью?
 4. Какое рациональное число представляется бесконечной периодической десятичной дробью?
 5. Что называют периодом бесконечной периодической десятичной дроби; предпериодом бесконечной периодической десятичной дроби?
 6. Как конечную десятичную дробь преобразовать в обыкновенную?
 7. Как бесконечную периодическую десятичную дробь без предпериода преобразовать в обыкновенную дробь?
 8. Как бесконечную периодическую десятичную дробь с предпериодом преобразовать в обыкновенную дробь?

1071. Докажите, что бесконечно убывающей геометрической прогрессией является бесконечная последовательность:

- а) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$; в) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$;
б) $-81; -27; -9; -1; \dots$; г) $-16, 8, -4, 2, \dots$.

1072. Установите, является ли бесконечно убывающей геометрической прогрессией бесконечная геометрическая прогрессия, для которой:

- а) $a_1 = 40, a_2 = -10$; в) $u_7 = 12, u_{11} = \frac{3}{4}$;
б) $b_6 = 18, b_7 = 36$; г) $v_5 = -9, v_9 = -\frac{1}{27}$.

1073. Установите, является ли бесконечно убывающей геометрической прогрессией бесконечная последовательность, для которой:

- а) $t_n = 3 \cdot (-2)^n$; в) $y_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;
б) $x_n = -3 \cdot 4^n$; г) $z_n = 7 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

1074. Докажите, что геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей, учитывая, что:

- а) $b_2 = -81, S_2 = 162$; в) $v_1 + v_3 = 130, v_1 - v_3 = 120$;
б) $y_2 = 33, S_2 = 67$; г) $z_2 + z_4 = 68, z_2 - z_4 = 60$.

1075. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, для которой:

- а) $a_1 = \frac{1}{8}, q = \frac{1}{2}$; в) $u_1 = 9, q = -\frac{1}{3}$;
 б) $b_5 = \frac{1}{81}, q = \frac{1}{3}$; г) $v_4 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$.

1076. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; г) $-6, 1, -\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \dots$;
 б) $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$; д) $-25, -5, -1, \dots$;
 в) $6, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \dots$; е) $-49, 7, -1, \dots$.

1077. Есть правильный треугольник со стороной a . В него соединением середин сторон вписывается треугольник, в который тем же способом вписывается новый треугольник, и так далее до бесконечности. Найдите:

- а) сумму периметров этих треугольников;
 б) сумму площадей этих треугольников.

1078. Есть квадрат со стороной l . В него соединением середин сторон вписан квадрат, в который таким же способом вписан новый квадрат, и так далее до бесконечности. Найдите:

- а) сумму периметров этих квадратов;
 б) сумму площадей этих квадратов.

1079. На кубе со стороной a стоит куб со стороной $\frac{a}{2}$, на котором стоит куб со стороной $\frac{a}{4}$, и т. д. Ребро каждого следующего куба в два раза короче ребра предыдущего куба. В результате получается ступенчатая фигура (рис. 366). Найдите:

- а) высоту этой фигуры;
 б) площадь задней боковой грани этой фигуры;
 в) объем этой фигуры.

1080. В угол, равный 60° , последовательно вписаны окружности, которые касаются друг друга (рис. 367). Радиус R_1 самой большой окружности равен r . Найдите радиусы $R_2, R_3, R_4, \dots$ следующих окружностей. Докажите, что сумма

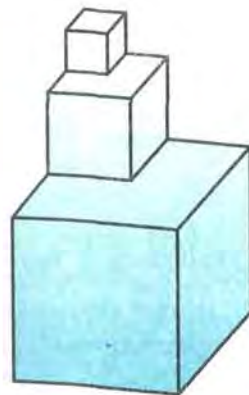


Рис. 366

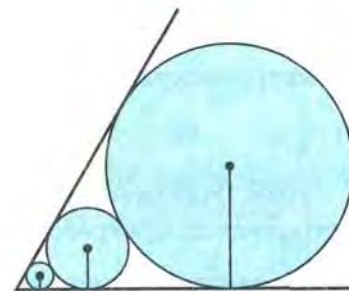


Рис. 367

$R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$ равна расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

1081. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$; в) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}, \dots$;
 б) $3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots$; г) $1, x, x^2, x^3, \dots$, если $|x| < 1$.

1082. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, для которой:

- а) $u_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}, q = \frac{1}{2}$; в) $l_3 = -9, q = -\frac{1}{3}$;
 б) $v_4 = \frac{1}{81}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $r_4 = -\frac{1}{8}, q = -\frac{1}{2}$.

1083. Найдите, при каких значениях переменной x прогрессия $\frac{a+x}{a-x}, \frac{a-x}{a+x}, \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3, \dots$ является бесконечно убывающей и найдите сумму ее членов.

1084. Постройте график функции $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$.

1085. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Найдите:

- а) u_1 , учитывая, что $q = \frac{1}{3}$;
 б) q , учитывая, что $t_1 = 75$.

1086. Составьте такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, чтобы сумма ее членов была равной $\frac{25}{4}$, а сумма квадратов ее членов — $\frac{625}{24}$.

1087. Установите, можно ли из чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ выбрать такие числа, которые образуют бесконечную геометрическую прогрессию с суммой членов, равной:

- а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{7}$.

1088. Найдите первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, учитывая, что:

- а) сумма членов прогрессии равна 4, а ее знаменатель — $\frac{1}{2}$;
 б) сумма членов прогрессии равна $2(\sqrt{2} + 1)$, а ее знаменатель — $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
 в) сумма пяти первых членов равна $\frac{11}{8}$, а сумма членов прогрессии — $\frac{4}{3}$.

1089. Найдите сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

- а) $1 + \sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^3 30^\circ + \dots$;
 б) $1 - \cos 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \cos^3 30^\circ + \dots$.

1090. С использованием суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии запишите обыкновенной дробью периодическую дробь без предпериода:

- а) 0,(2); б) 2,(7); в) 1,(3); г) 2,(21); д) 1,(27);
 е) 0,(19); ж) 3,(342); з) 0,(901); и) 5,(00,2); к) -7,(0102).

Найдите эту сумму.

1091. С использованием суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии запишите периодическую дробь с предпериодом:

- а) 0,2(3); б) 1,0(7); в) 2,3(24); г) 3,7(288); д) 3,20(3);
 е) 2,15(30); ж) 1,06(32); з) 0,00(819); и) 0,111(2); к) -7101,(70101).

Найдите эту сумму.

1092. Представьте десятичной дробью рациональное число:

- а) $\frac{9}{11}$; б) $-\frac{13}{37}$; в) $4\frac{6}{41}$;
 г) $\frac{9}{44}$; д) $-\frac{13}{74}$; е) $4\frac{6}{123}$.

1093. Найдите представление бесконечной периодической десятичной дробью рационального числа с числителем 47 и знаменателем:

- а) 37; б) 41; в) 73; г) 111; д) 185.

1094. Найдите представление бесконечной периодической десятичной дробью рационального числа со знаменателем 72 и числителем:

- а) 19; б) 11; в) 161; г) 271; д) 7.

1095. Обыкновенной дробью представьте рациональное число:

- а) 0,(36); б) 0,(81); в) 3,(234); г) 4,(93); д) -6,(7361); е) 0,(923076).

1096. Обыкновенной дробью представьте рациональное число:

- а) 0,3(36); б) 0,27(81); в) 3,144(234);
 г) 4,111(93); д) -6,54(7361); е) 0,0102(923076).

1097. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 15$ и установите:

- а) на какое множество отображается промежуток $[-1; 6]$;
 б) образом какого промежутка является промежуток $[-16; 0]$.

1098. Используя график функции $V = -\frac{5}{4}r^2 - 5r - 6$, изображенный на рисунке 368, решите неравенство:

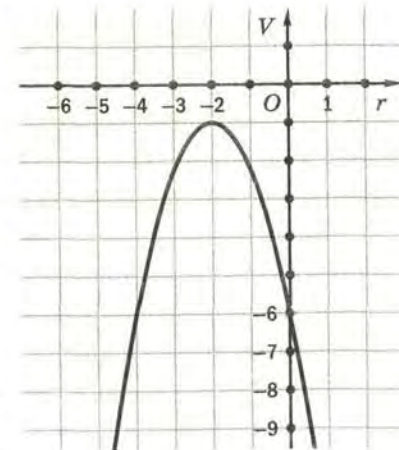


Рис. 368

а) $-\frac{5}{4}r^2 - 5r - 6 < 0$; в) $-\frac{5}{4}r^2 - 5r - 6 > 0$;
 б) $-\frac{5}{4}r^2 - 5r - 6 \leq 0$; г) $-\frac{5}{4}r^2 - 5r - 6 \geq 0$.

1099. Из Вульки Обровской выехал велосипедист, а через некоторое время из Вульки навстречу ему второй велосипедист, который через $\frac{2}{3}$ ч встретил первого, не доехав 5 км до Святой Воли, при этом первый велосипедист до встречи проехал 20 км (рис. 369). Найдите пути от Святой Воли до Вульки Обровской и до Телеханов, учитывая, что второй велосипедист ехал со скоростью на 3 км/ч большей, а средняя скорость оказалась равной 16 км/ч.



Рис. 369

1100. Одно тело массой 2,4 кг движется с ускорением на $1,5 \text{ м/с}^2$ меньшим по сравнению со вторым, которое движется под воздействием силы, равной 4,8 Н. Найдите ускорения, с которыми движутся тела, учитывая, что если бы на третье тело с массой, равной общей массе данных тел, действовала сила, равна сумме сил, действующих на данные тела, то его ускорение оказалось бы равным $2,1 \text{ м/с}^2$.

1101. На отрезке AB выбрали точку C , отстоящую от точки A на 7 м, и на отрезках-частях CA и CB построили такие треугольники CAP и CBQ , что высота второго оказалась на 22 м большей, а его площадь равной 240 м^2 (рис. 370). Найдите высоты треугольников CAP и CBQ , учитывая, что высота

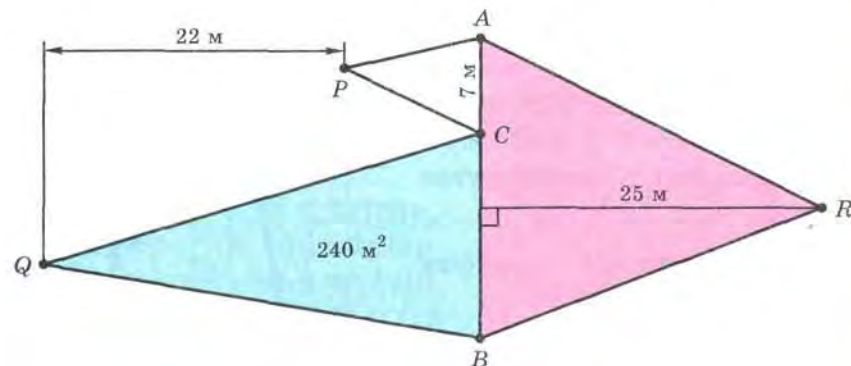


Рис. 370

третьего треугольника, построенного на отрезке AB с площадью, равной общей площади двух первых треугольников, оказалась равной 25 м.

1102. Когда сплавляли кусок одного металла массой 179,2 кг с куском другого объемом $10\,000 \text{ см}^3$, то получился сплав с плотностью $8,35 \text{ г/см}^3$. Определите, какие металлы сплавляли, учитывая, что плотность металла в первом куске на $1,83 \text{ г/см}^3$ большая.

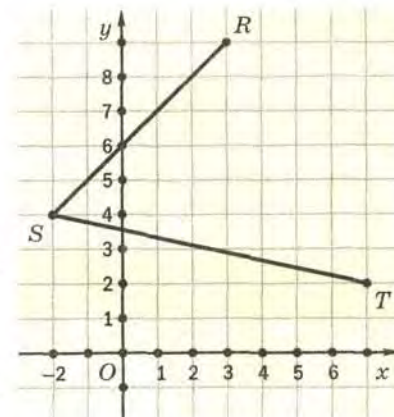


Рис. 371

1103. Есть ломаная RST , изображенная на рисунке 371. Установите:

- является ли функцией отношение, которое каждой точке ломаной RST ставит в соответствие ее абсциссу;
- каждому действительному числу из промежутка $[-2; 7]$ ставит в соответствие точку ломаной RST , для которой это число является абсциссой;
- каждому действительному числу из промежутка $[2; 9]$ ставит в соответствие точку ломаной RST , для которой это число является ординатой;
- уравнение прямой, которой принадлежит отрезок RS ;
- уравнение прямой, которой принадлежит отрезок ST .

* * *

1104. Докажите, что при всех значениях переменной x значения выражения $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ положительны.

1105. На плоскости отмечены точки A, B, C, D так, что для каждой точки M плоскости истинно условие $MA + MD \geq MB + MC$. Что можно сказать о взаимном расположении точек A, B, C, D ?

1106. Найдите значение суммы $6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{66 \dots 6}_{2008 \text{ цифр}}$.

Раздел VII



ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИКИ

25*. Аксиоматический метод

Десять лет вы постигали одну из самых древних наук — математику. Результатом этого стало усвоение основных фактов о числах, выражениях с переменными, геометрических фигурах. Пришло время ответить на вопрос о том, как устроена математика.

Основу математической теории составляют математические утверждения, которые выражают свойства понятий или отношения между ними.

Понятие вводится в теорию с помощью определения. Например, понятие параллелограмма можно ввести таким определением «Параллелограммом называется трапеция, у которой боковые стороны параллельны». Чтобы дать такое определение, нужно предварительно определить те понятия, которые использованы в определяющем «Трапеция, у которой боковые стороны параллельны», т. е. понятия трапеции, боковой стороны, параллельности отрезков. Понятие трапеции вводится определением с определяющим «Четырехугольник, у которого есть пара параллельных сторон». Определение четырехугольника имеет определяющим словосочетание «Простая замкнутая ломаная вместе с внутренней областью». Понятие простой замкнутой ломаной вводится через понятие ломаной, которое в свою очередь опирается на понятие отрезка. Отрезок определяется как множество, состоящее из двух точек прямой и всех точек, лежащих между ними. В результате мы дошли до понятий точки и прямой, которые уже не

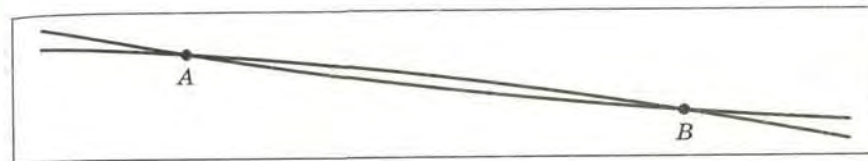


Рис. 372

сводятся к другим. Понятно, что процесс введения понятий определениями должен иметь свое начало — определенный набор понятий, которые не вводятся через другие понятия. Их так и называют — **неопределяемые понятия теории**. К таким понятиям относятся уже указанные понятия точки и прямой.

Утверждение становится компонентом теории после того, как оно доказано. При доказательстве некоторого утверждения мы ссылаемся на определения и ранее доказанные утверждения. Доказывание этих утверждений потребует использования утверждений, доказанных еще раньше. Понятно, что этот процесс не может быть бесконечным. Процесс последовательного доказывания утверждений, как и процесс последовательного определения понятий, должен иметь свое начало — определенный набор утверждений, которые не доказываются. Такие утверждения называют **аксиомами**. Аксиомы, в которых формулируются основные свойства неопределяемых понятий, дают их косвенное определение и составляют основу доказательств теорем.

При изучении геометрии мы через две данные точки проводили прямую и считали, что такая прямая есть только одна. Однако почему нельзя допустить, что через эти две точки можно провести еще одну прямую (рис. 372)? Такое невозможно, говорим мы, так как прямая не имеет изгибов, она ровная, одинаково расположенная относительно всех своих точек. Но это наше представление нужно явно и точно выразить, т. е. нужна специальная аксиома.

Мы часто пользовались тем, что прямая, проходящая через внутреннюю точку круга, пересекает его окружность в двух точках. Мол, это очевидно (рис. 373). Однако почему нельзя допустить, что как раз там, где прямая должна пересечь окружность, на ней нет никакой точки, там будто бы «дыра», и окруж-

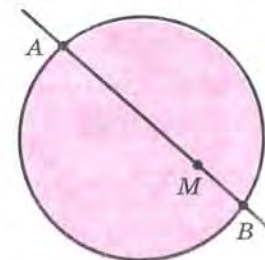


Рис. 373

ность переходит с одной стороны прямой на другую, не пересекая прямую. Мы говорим, что такое невозможно, так как прямая сплошная, непрерывная, в ней нет «дырок». Но это наше представление о прямой нужно «узаконить» специальной аксиомой, которая называется *аксиомой непрерывности*.

При измерении отрезков мы считаем, что данным отрезком, принятым в качестве единицы измерения, можно измерить любой другой отрезок. А почему нельзя допустить, что найдется такой длинный отрезок, что сколько бы раз мы ни откладывали на нем принятую единицу измерения, все еще будет оставаться часть отрезка, большая единичного отрезка? Мы считаем, что такое невозможно. Но тогда соответствующее утверждение нужно доказать или принять в качестве аксиомы. Это поняли еще древние греки и высказали аксиому «Для любых двух отрезков a и b найдется такое натуральное число n , что $na > b$ », которая теперь называется *аксиомой Архимеда*.

После выделения основных понятий теории и формулирования ее аксиом все дальнейшие утверждения выводятся логическим путем, т. е. являются следствиями из аксиом. Такой способ построения научной теории называют **аксиоматическим методом**. В математике аксиоматический метод оформился в работах древнегреческих геометров. Блестящим об-

разцом его применения стала геометрическая теория Евклида, изложенная под названием «Начала» (около 300 г. до н. э.).

Евклид (рис. 374) подытожил предшествующее развитие греческой математики и создал фундамент ее дальнейшего развития. По его «Началам» на протяжении многих столетий изучали геометрию во всех школах, влияние «Начал» ощущается и в современных школьных учебниках.

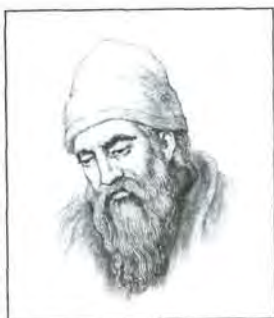


Рис. 374

- ?
1. Какие понятия теории называют неопределяемыми понятиями?
 2. Какое утверждение теории называется ее аксиомой; теоремой?
 3. Какой метод построения теории называют аксиоматическим методом?

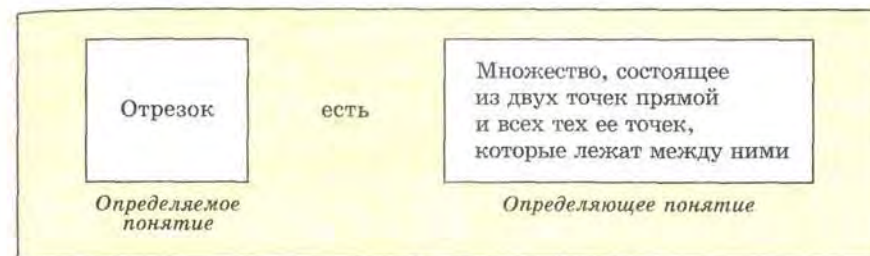


Рис. 375

1107. В определении *Отрезком* называется множество, состоящее из двух точек прямой и всех тех ее точек, лежащих между ними определяемым является понятие *отрезок* и определяющим — понятие *множество, состоящее из двух точек прямой и всех тех ее точек, лежащих между ними* (рис. 375), причем определяющее использует понятия: *множество, точка, прямая, точка лежит между двумя другими точками*.

Выделите понятия, использованные в определяющем определении:

- а) угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны имеют с окружностью общие точки, называется вписанным углом;
- б) точку пересечения медиан треугольника называют центроидом треугольника;
- в) рациональным неравенством называется неравенство вида $q(x) \vee 0$, где символ $\vee$ обозначает один из знаков неравенства $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$, а $q(x)$ — некоторое рациональное выражение;
- г) правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны друг другу и все углы равны друг другу;
- д) последовательность, которая является убывающей функцией, называется убывающей последовательностью;
- е) числовая последовательность, у которой любой ее член, начиная со второго, получается из предыдущего члена прибавлением одного и того же числа, называется арифметической прогрессией;
- ж) неотрицательный корень n -й степени из неотрицательного числа называют арифметическим корнем n -й степени;
- з) рациональные и иррациональные выражения вместе составляют множество алгебраических выражений;

и) иррациональным неравенством называется неравенство, которое содержит действие извлечения корня из выражения с переменной или действие возведения выражения с переменной в дробную степень.

1108. Выделите понятия, использованные в определяющем определении:

- а) точку пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, называют ортоцентром треугольника;
- б) функция, областью определения которой является множество натуральных чисел или множество первых n натуральных чисел, называется последовательностью;
- в) способ задания последовательности, при котором явно указывается первый член или несколько первых членов и формула, позволяющая найти любой член последовательности по известным предыдущим членам, называют рекуррентным заданием последовательности;
- г) числовая последовательность с не равным нулю первым членом, в которой любой ее член, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением на определенное, не равное нулю число, называется геометрической прогрессией;
- д) корнем n -й степени из числа a называется такое число, n -я степень которого равна a ;
- е) выражение с переменными называется иррациональным выражением, если оно содержит хотя бы одно действие извлечения корня из выражения с переменными;
- ж) иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее действие извлечения корня из выражения с переменной или действие возведения в дробную степень выражения с переменной.

1109. Выделите условие и заключение в теореме:

- а) если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания;
- б) если четырехугольник является описанным около окружности, то у него равны суммы противоположных сторон;
- в) если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен, то его значения при всех значениях переменной x имеют тот же знак, что и старший коэффициент a ;
- г) если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то его значения при всех значениях переменной x ,

отличных от корня трехчлена, имеют тот же знак, что и старший коэффициент a ;

д) если число a — наибольший корень многочлена $q(x)$, то значение функции $y = q(x)$ при значении переменной x , большем a , совпадает по знаку со значением старшего коэффициента этого многочлена;

е) если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при любом натуральном значении n ;

ж) если n — нечетное число, то неравенство $a > b$ равносильно неравенству $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ при любых значениях a и b ;

з) если $0 < \frac{m}{n} < 1$, то на промежутке $(0; 1)$ значение функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ больше значения функции $y = x$, а на промежутке $(1; +\infty)$ значение функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ меньше значения функции $y = x$;

и) если любой член некоторой последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов, то такая последовательность является арифметической прогрессией.

1110. Выделите условие и заключение в теореме:

- а) вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается;
- б) вписанный угол, который опирается на диаметр, является прямым;
- в) отрезки двух касательных, проведенные через одну точку, заключенные между этой точкой и точками касания, равны друг другу;
- г) биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности;
- д) внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним;
- е) биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам;
- ж) стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов;
- з) из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к ее основаниям, подобны, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики;

и) при $1 < n_1 < n_2$, если $0 < x < 1$, то $x^{n_1} > x^{n_2}$, а если $x > 1$, то $x^{n_1} < x^{n_2}$;

к) произведения любой пары членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленные от ее концов, равны друг другу.

1111. Рассмотрим теорему «Если $a < b$, то $b > a$ » и ее доказательство: «Пусть $a < b$. Тогда по определению отношения

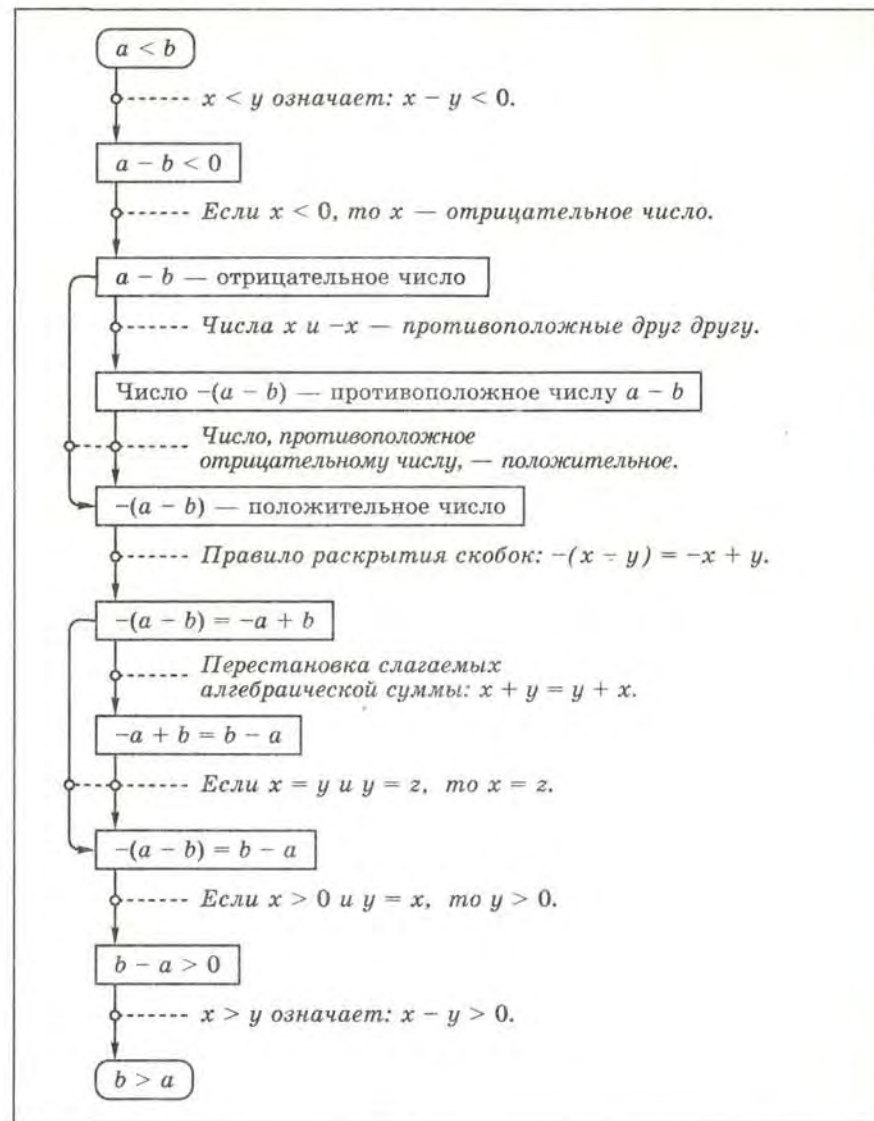


Рис. 376

меньше можно записать, что $a - b < 0$. Это означает, что разность $a - b$ есть отрицательное число. Значит, число $-(a - b)$, противоположное этой разности, есть положительное число: $-(a - b) > 0$. Учитывая, что $-(a - b) = -a + b = b - a$, получим $b - a > 0$. А это в соответствии с третьим утверждением определения 1 позволяет записать: $b > a$ ». Рисунок 376 явно показывает структуру доказательства, здесь отчетливо видно, как, исходя из условия $a < b$, происходит последовательный переход к новым утверждениям-следствиям с явным указанием тех утверждений, на основании которых происходит соответствующий переход, пока не получится заключение $b > a$.

Проанализируйте таким же образом доказательство теоремы «Если $a < b$ и c — произвольное число, то $a + c < b + c$ »:

Пусть $a < b$. Тогда в соответствии с определением отношения меньше истинно условие $a - b < 0$, т. е. $a - b$ является отрицательным числом. Поскольку $a - b = (a + c) - (b + c)$, то число $(a + c) - (b + c)$ также отрицательное. Это означает, что неравенство $a + c < b + c$ истинно.

1112. Проанализируйте доказательство теоремы:

а) «Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$ ».

Пусть $a < b$ и c — произвольное отрицательное число. Тогда в соответствии с первым утверждением определения 1 истинно условие $a - b < 0$, т. е. $a - b$ является отрицательным числом. Поскольку $ac - bc = (a - b)c$, то число $ac - bc$ положительное как произведение двух отрицательных чисел. Это означает, что неравенство $ac > bc$ истинно;

б) «График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси абсцисс».

Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. $b = f(a)$. Тогда точка $N(a; -b)$ принадлежит графику функции $y = -f(x)$, поскольку $-f(a) = -b$. Точки $M(a; f(a))$ и $N(a; -f(a))$ симметричны друг другу относительно оси абсцисс (рис. 377). Это означает, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси абсцисс.

1113. Рассмотрим теорему «Если в треугольнике биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то

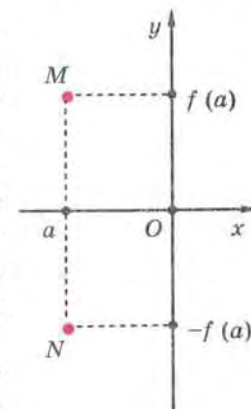


Рис. 377



Рис. 378

такой треугольник является равнобедренным» и ее доказательство:

«Пусть отрезок OO_1 — биссектриса и высота треугольника NOP (рис. 378). Тогда $\angle NOO_1 = \angle POO_1$, а $\angle NO_1O = \angle PO_1O = 90^\circ$. Учитывая, что отрезок OO_1 — общая сторона треугольников NO_1O и PO_1O , по второму признаку равенства треугольников получим, что $\triangle NO_1O = \triangle PO_1O$. Поэтому $NO = PO$ ». Рисунок 379 представляет структуру этого доказательства.

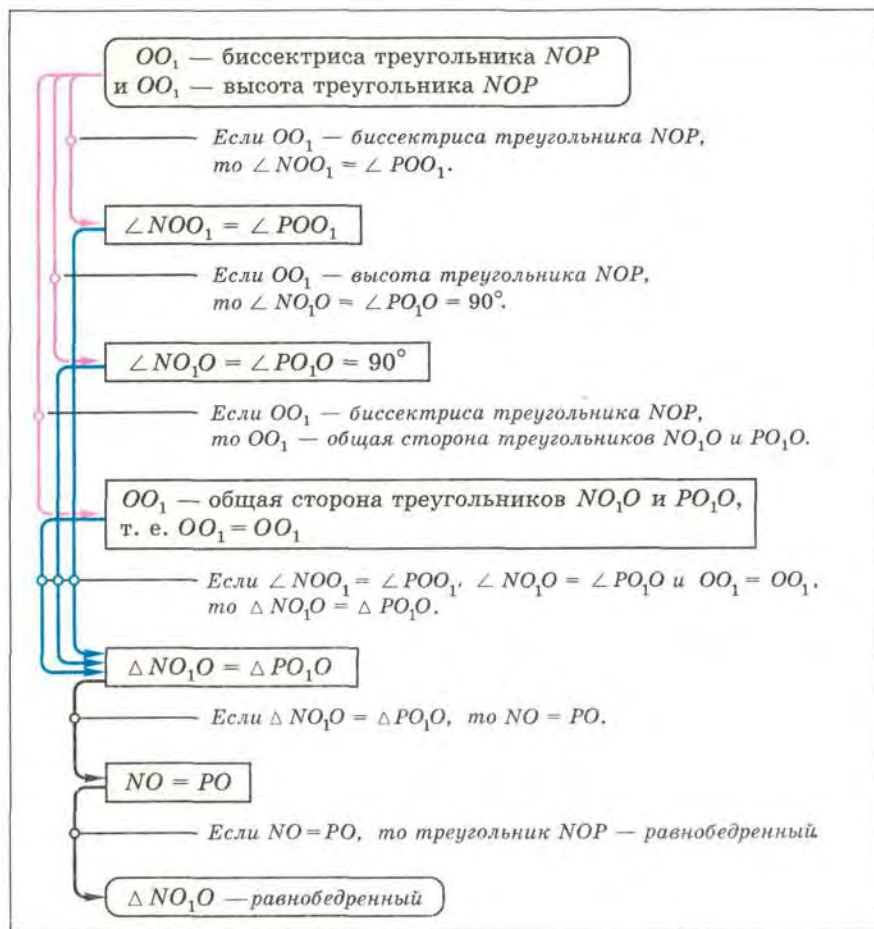


Рис. 379

Проанализируйте таким же образом доказательство теоремы «Если в треугольнике медиана и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник является равнобедренным».

«Пусть в треугольнике KLM отрезок LL_1 — медиана и высота (рис. 380). Тогда $KL_1 = ML_1$, а $\angle KL_1L = \angle ML_1L = 90^\circ$.

Учитывая, что отрезок LL_1 — общая сторона треугольников KL_1L и ML_1L , по первому признаку равенства треугольников получим, что $\triangle KL_1L = \triangle ML_1L$. Поэтому $KL = LM$ ».

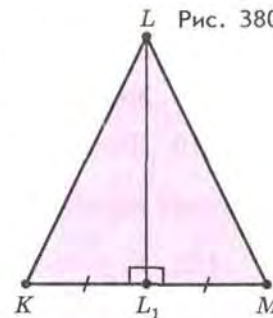


Рис. 380

1114. Найдите значение выражения:

- а) $\left(40\frac{7}{20} - 13\frac{7}{10}\right) : 2 + \frac{23}{40} \cdot 4$;
 б) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 6\frac{1}{3}$;
 в) $\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7} + \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right) \cdot 3\frac{3}{17}$;
 г) $\left(29\frac{2}{5} + 28\frac{9}{40}\right) : 28\frac{13}{16} - 4 \cdot \frac{3}{8}$.

1115. Представьте многочленом стандартного вида выражение:

- а) $(x+2)(x^2-5x+6) + (2-x)(x^2-x-2)$;
 б) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$;
 в) $(3l-5k+8j)(2l-3k) + (2l-5k+6j)(3k-2l)$;
 г) $(2h-3g+4f)(5h+4g) - (3h-2g)(3g-2h-4f)$.

1116. Разложите на множители выражение:

- а) $6er - 2tr - 3e + t$; ж) $m^2 + 2mn - 15n^2$;
 б) $9s^2 - 6sd + d^2 - f^2$; з) $10g^2 - 29gf + 10f^2$;
 в) $p^3 - p^2 - p + 1$; и) $j^2 - 2jh + h^2 - g^2$;
 г) $c^2 - c - 12$; к) $h^5 - h^3 + h^2 - 1$;
 д) $(q+z)^2 - (q-z)^2$; л) $27l^3 - 8k^3$;
 е) $a^4 + a^3 + a + 1$; м) $t^6 - c^6$.

1117. Разложите на множители выражение:

- а) $c^3 - 216$; г) $0,008 + y^6$; ж) $(2c+1)^3 - 27$;
 б) $k^3 + 512$; д) $x^6 + 0,625$; з) $8 - (3-k)^3$;
 в) $0,001 - a^3b^3$; е) $x^{12} - y^{12}$; и) $8x^3 - (5x-3)^3$.

1118. Разложите на множители выражение:

- а) $x^3 - 4x^2 + 20x - 125$; в) $(x^3 - 27)^2 - 81x^2(x - 3)^2$;
б) $27y^3 - 3y^2 + 2y - 8$; г) $9a^2b^2(a + b)^2 - (a^3 + b^3)^2$.

1119. Докажите, что при любом натуральном значении k значение выражения $\frac{(2k+1)^4 - 1}{4k^2 + 4k + 2}$ кратно 8.

1120. Упростите выражение:

- а) $\frac{kl + km - nl - mn}{kl - km - nl + mn}$; е) $\frac{s^2 + d^2 - f^2 + 2sd}{s^2 - d^2 + f^2 + 2sf}$;
б) $\frac{m^2 - (n - b)m - nb}{m^2 + bm + nm + nb}$; ж) $\frac{g^2 - gh - gj + hj}{h^2 - gh - hj + gj}$;
в) $\frac{e^2 - r^2 - et + rt}{er + et + r^2 - t^2}$; з) $\frac{x - xy + z - zy}{y^3 - 3y^2 + 3y - 1}$;
г) $\frac{2z^2 - zy - 3z^2}{2z^2 + 5zy + 3y^2}$; и) $\frac{m^4 - 2m^2 + 1}{m^2n^2 - m^2 - n^2 + 1}$;
д) $\frac{q^2 - r^2 + s^2 + 2qs}{q^2 + r^2 - s^2 + 2rs}$; к) $\frac{p^2 - p - 42}{p^2 + p - 30}$.

1121. Упростите выражение:

- а) $x^2 + xz + z^2 + \frac{2z^2}{x - z}$; д) $\frac{2m - 3}{3m - 3} - \frac{3m - 1}{4m + 4} - \frac{m + 2}{m^2 - 1}$;
б) $r^3 - cr + c - \frac{2c^3}{r + c}$; е) $\frac{5a + 4}{a - 2} - \frac{3a - 2}{a - 3} - \frac{a^2 - 2a - 17}{a^2 - 5a + 6}$;
в) $\frac{5b - 1}{b^2 - 2b + 3} + 2b + 1$; ж) $\frac{s + 1}{s^2 - s - 12} + \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 3} - \frac{2s - 6}{s^2 - 3s - 4}$;
г) $1 - 2n + \frac{3n^2 + n^3}{1 - 3n + 2n^2}$; з) $\frac{d - 4}{2d - 1} - \frac{3d - 5}{d + 2} + \frac{5d^2 + 9d + 14}{2d^2 + 3d - 2}$.

1122. Найдите значение выражения:

- а) $6q + \left(\frac{q}{q-2} - \frac{q}{q+2}\right) : \frac{4q}{q^4 - 2q^3 + 8q - 16}$ при $q = -2,5$;
б) $\left(\frac{s-1}{s+1} - \frac{s+1}{s-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{4} - \frac{1}{4s}\right)$ при $s = -3\frac{3}{4}$;
в) $\left(\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^3 : \frac{z^3 + 4z^2 + 4z}{3z^2 - 12z + 12}\right) \cdot \frac{z}{3}$ при $z = -0,5$;
г) $\left(\frac{p^2}{p+d} - \frac{p^3}{p^2 + 2pd + d^2}\right) : \left(\frac{p}{p+d} - \frac{p^2}{p^2 - d^2}\right)$ при $p = -2,5$; $d = -0,5$.

1123. Упростите выражение:

- а) $\frac{\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1+q}}{\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1+q}}$; д) $1 + \frac{a}{1 - \frac{a}{a+2}}$; и) $\frac{e - 2 + \frac{3}{e}}{1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}}$;
б) $\frac{\frac{e}{e-1} - \frac{e+1}{e}}{\frac{e}{e+1} - \frac{e-1}{e}}$; е) $1 - \frac{z}{1 - \frac{z}{z+1}}$; к) $\frac{1 - \frac{2k}{l} + \frac{k^2}{l^2}}{l - k}$;
в) $\frac{\frac{s+d}{s-d}}{\frac{(s+d)^2}{s^2 - d^2}}$; ж) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{q}}}$; л) $\frac{\frac{j}{h} - 2 - \frac{3h}{j}}{\frac{j}{h} + \frac{3h}{j} - 4}$;
г) $\frac{\frac{f-g}{f} + \frac{f+g}{f}}{\frac{f}{g} + \frac{g}{f}}$; з) $\frac{p}{p - \frac{1}{p - \frac{p}{1-p}}}$; м) $\frac{\frac{c}{4} - 1 + \frac{3}{4c}}{\frac{c}{2} - \frac{6}{c} + \frac{1}{2}}$.

1124. Упростите выражение:

- а) $\frac{1}{4} \cdot (qz^{-1} - zq^{-1}) \cdot \left(\frac{z^{-1} - q^{-1}}{z^{-1} + q^{-1}} - \frac{z^{-1} + q^{-1}}{z^{-1} - q^{-1}}\right)$;
б) $\left(\frac{n^2(mn^{-1} - 1)^2}{m(1 + m^{-1}n)^2} \cdot \frac{n^2(m^{-2} + n^{-2})}{m(mn^{-1} - m^{-1}n)}\right) : \frac{1 - m^{-1}n}{mn^{-1} + 1}$;
в) $\left(\frac{1 + kl^{-1}}{k^{-1}l^{-1}} \cdot \frac{k^{-1}l^{-1}}{k^{-1}l - kl^{-1}}\right) : \frac{kl^{-1}}{l - k}$;
г) $\frac{s^{-2}d^{-1} + s^{-1}d^{-2}}{s^{-2} - d^{-2}} + s^3(s^2 - 2sd + d^2)^{-2}$.

1125. Упростите выражение $\left(\frac{e^{-r} - t^{-r}}{e^{-2r} - e^{-r}t^{-r} + t^{-2r}}\right)^{-1} + \left(\frac{e^{-r} + t^{-r}}{e^{-2r} + e^{-r}t^{-r} + t^{-2r}}\right)^{-1}$ и найдите его значение при $e = 0,1$; $t = \frac{1}{8}$ и $r = 1$.

1126. Упростите выражение:

- а) $\left(q^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $\left(2p^{-\frac{3}{4}} + 3p^{\frac{3}{4}}\right)^2$; д) $\left(j^{\frac{1}{3}} - h^{\frac{1}{3}}\right)^3$;
б) $\left(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}\right)^2$; г) $\left(y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{6}}\right)^2$; е) $\left(g^{-\frac{2}{3}} - g^{\frac{4}{3}}\right)^3$.

1127. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt[3]{h} + 2\sqrt[3]{h^2} - 3 = 0; & \text{в) } k^2 + \sqrt{k^2 - 9} = 21; \\ \text{б) } \sqrt{j-3} + 6 = 5\sqrt[4]{j-3}; & \text{г) } 3l^2 + 15l + 2\sqrt{l^2 + 5l + 1} = 2. \end{array}$$

1128. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{p}{3(p^2-1)} + \frac{2p}{3(1-p^4)} = \frac{1}{p(1+p^2)}; & \\ \text{б) } \frac{1}{2(y^2+1)} + \frac{7,5}{y^2(1-y^4)} = \frac{9}{2y^2(y^2-1)}; & \\ \text{в) } (t+5)^4 - 13(t+5)^2t^2 + 36t^4 = 0; & \\ \text{г) } \left(\frac{f}{f-1}\right)^2 + \left(\frac{f}{f+1}\right)^2 = \frac{10}{9}. & \end{array}$$

1129. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } z^2 - 3z + \sqrt{z^2 - 3z + 5} = 7; & \\ \text{б) } c^2 - 7c + \sqrt{c^2 - 7c + 18} = 24; & \\ \text{в) } b^2 + 3b + 4\sqrt{b^2 + 3b - 6} = 18; & \\ \text{г) } 2n^2 + 3n - 5\sqrt{2n^2 + 3n + 9} + 3 = 0. & \end{array}$$

1130. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{1}{g + \sqrt{1+g^2}} + \frac{1}{g - \sqrt{1+g^2}} = -2; & \\ \text{б) } \frac{1}{1 - \sqrt{1-h^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1-h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{h^2}; & \\ \text{в) } \frac{2}{\sqrt{j}} - \frac{j}{\sqrt{j} - \sqrt{1-j}} = \frac{j}{\sqrt{j} + \sqrt{1-j}}; & \\ \text{г) } \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{3}} + \sqrt{\frac{k}{3}}} - \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{3}} - \sqrt{\frac{k}{3}}} + 6 = 0. & \end{array}$$

1131. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (q+1)(q-2) > 0; & \text{д) } (e-1)(e+2) > e+2; \\ \text{б) } a(3-a) > 0; & \text{е) } (d+4)(d+6) < 6(d+6); \\ \text{в) } (z-4)(1-3z) < 0; & \text{ж) } (2c+3)(3c-2)(c^2+2) < 0; \\ \text{г) } (1-s)(6-s) < 0; & \text{з) } (r-8)(8-5r)(r-2)^2 > 0. \end{array}$$

1132. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 7q^2 - 3e^2 + 5qe - 2q - 27 = 0, \\ q + e = 5; \end{cases} & \\ \text{б) } \begin{cases} 2r^2 - 5rt + t^2 + 10r + 12t = 100, \\ 2r - 3t = 1; \end{cases} & \\ \text{в) } \begin{cases} 2a^2 - as - s^2 + 2a - 2s + 6 = 0, \\ s - a = 1; \end{cases} & \\ \text{г) } \begin{cases} d^2 + 2df + 3f^2 - 48d + 4f - 4 = 0, \\ 3d + f = 2. \end{cases} & \end{array}$$

1133. Решите уравнение:

$$\text{а) } x^7 - x = 0; \quad \text{б) } 8y^4 + y = 0.$$

1134. На одной стороне прямого угла на расстояниях a и b от его вершины отмечены две точки. Найдите радиус окружности, проходящей через эти точки и касающейся другой стороны угла.

1135. Окружность с радиусом 13 касается двух смежных сторон квадрата. Определите, в каком отношении она делит другие стороны, учитывая, что сторона квадрата равна 18.

1136. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписана окружность. Найдите наименьшее расстояние от точек окружности до вершины прямого угла.

1137. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности с радиусом r , а две другие — на касательной к этой окружности.

1138. В треугольнике ABC известны стороны: $BC = a$, $CB = b$, $AB = c$. Найдите отношение, в котором биссектриса угла B делится точкой пересечения с другой биссектрисой.

1139. Точки касания сторон ромба с вписанной в него окружностью делят стороны в отношении 2 : 3. Найдите синус угла ромба.

1140. На основании KM равнобедренного треугольника KLM взята такая точка X , что $KX = a$, $XM = b$, и в треугольнике KLX и MLX вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной LX .

1141. Париж, Марсель, Лион, Тулуза, Ницца — наибольшие города Франции (рис. 381). Население Лиона относится к уменьшенному на 1 тыс. чел. населению Марселя как 6 : 11, а к увеличенному на 2 тыс. чел. населению Тулузы — как 37 : 34. Население Тулузы относится к уменьшенному на 5 тыс. чел. населению Ниццы как 58 : 47, а население Марселя к увеличенному на 6 тыс. чел. населению Парижа — как 5 : 13. Найдите население этих городов Франции, учитывая, что население Парижа на 114 тыс. чел. больше общего населения остальных городов.

1142. В первый рабочий день месяца магазин радиотехники продал 105 телевизоров. Каждый следующий день дневная продажа увеличивалась на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно в конце



Рис. 381

одного из дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в последний день выполнения плана. На сколько процентов был выполнен месячный план продаж телевизоров, если в этом месяце было 26 рабочих дней?

1143. Хозяйка за 1 кг одного продукта и 10 кг другого уплатила 20 тыс. р. Сезонное изменение цен привело к тому, что первый продукт подорожал на 15 %, а второй подешевел на 25 %, и в результате та же покупка стала стоить 18 200 р. Какова теперь цена каждого продукта?

1144. Есть два разных экскаватора. Первый за 3 раза вынимает столько же грунта, сколько второй за 5 раз, но за время, пока первый забирает грунт 4 раза, второй успевает сделать это 7 раз. Экскаваторы выкопали котлован под дом за 6 дней, работая ежедневно по 7 ч. Сколько времени понадобилось бы на выполнение всей работы одному первому экскаватору?

1145. На одинаковых станках, установленных в первом цехе, за смену можно обработать 6480 деталей, а на одинаковых станках, стоящих во втором цехе и которых на 3 больше, за смену можно обработать 11 210 деталей. Сколько станков в первом цехе?

* * *

1146. Запишите уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1147. Есть треугольник ABC , в котором $AB > BC$. На стороне AB выбрана такая точка K , что $BK = BC$. Биссектриса BL пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N . Докажите, что точки A , K , L и N лежат на одной окружности.

1148. Докажите, что если целые числа x и y при некотором целом n удовлетворяют равенству $x + y\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^n$, то они удовлетворяют и равенству $x^2 - 5y^2 = 1$, и наоборот.

26*. Логические основы арифметики

Арифметика — часть математики, которая вместе с геометрией и алгеброй является древнейшей отраслью этой науки. Арифметика изучает разные числовые множества, из которых исходным является множество натуральных чисел.



Рис. 382

Арифметика возникла в глубокой древности в ответ на потребности счета и простейших измерений. Сначала счет был возможен только для множеств с небольшим количеством предметов, а инструментами счета служили зарубки на деревянной палочке (рис. 382), счетные камешки, пальцы рук и т. п.

Словесный порядковый счет — один, два, три, ... — впоследствии дополняется счетом группами, содержащими определенное количество предметов, чаще всего 10, что объясняется использованием при счете пальцев рук, которых как раз 10. Встречаются, однако, группировки по 5, 20, 12, 60, а у аборигенов Новой Зеландии даже по 11 предметов.

Первые точные сведения о состоянии арифметических знаний во времена древних цивилизаций получены из математических папирусов Древнего Египта, которые содержат задачи с решениями, правила действий над целыми числами и дробями. На рисунке 383 показан фрагмент папируса Ринда (около 2000 до н. э.), который содержит вычисление площади треугольника. Об уровне арифметической культуры в Древнем Вавилоне свидетельствуют клинописные математические тексты. Эти тексты показывают, что вавилоняне пользовались шестидесятеричной системой счета, в которой единица следующего разряда содержит не 10, как в десятичной, а 60 единиц предыдущего разряда, техника выполнения арифметических действий была аналогична обычным приемам вычислений в десятичной системе. На рисунке 384 приведен пример клинописного математического текста. На нем изо-



Рис. 383

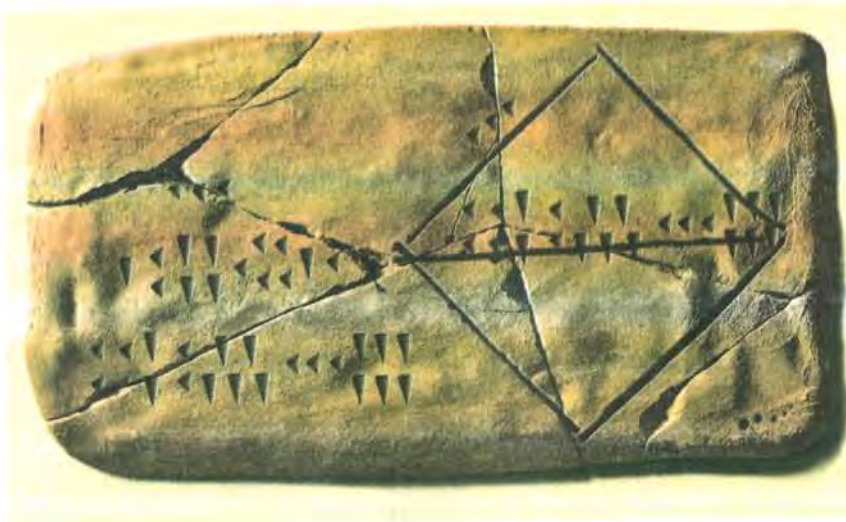


Рис. 384

бражен квадрат с диагональю, сторона которого равна 30. Это число, число 1;24,51,10, что означает $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1 + 0,4 + 0,014167 + 0,000046 \approx 1,414213 \approx \sqrt{2}$, т. е. число, которое выражает отношение диагонали квадрата к его стороне, и число 42;25,36, т. е. $42 + \frac{25}{60} + \frac{36}{60^2}$, которое выражает длину диагонали, записано одно под другим слева. Длины стороны и диагонали обозначены и на самом квадрате.

Математики Древней Греции положили начало теоретической разработке арифметики. В «Началах» Евклида, созданных около 300 г. до н. э., доказана бесконечность множества простых чисел, установлен алгоритм нахождения НОД двух натуральных чисел, иррациональность числа $\sqrt{2}$. Древнегреческие математики рассматривали задачи о совершенных и пифагоровых числах, нашли алгоритмы нахождения простых чисел. Диофант (вероятно, III в.) (рис. 385) рассматривал решение задач, которые сводил к уравнениям, и искал решения этих уравнений в целых или рациональных числах. Позже такие уравнения стали называть диофантовыми уравнениями.

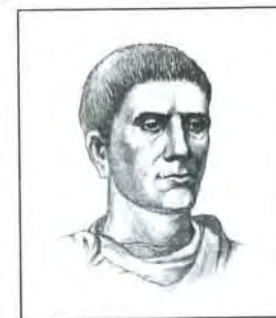


Рис. 385



Рис. 386



Рис. 387



Рис. 388

Примером такого уравнения является уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, решения которого дают длины сторон прямоугольного треугольника. Поэтому такие тройки чисел называют *пифагоровыми числами*. Архимед (около 287—212 до н. э.) (см. рис. 309) описал извлечение квадратного корня из многозначных чисел, нахождение рациональных приближений для иррациональных чисел, например $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}$, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

В средние века арифметика развивалась слабо, но в начале XVII ст. в связи с запросами практики — мореходной астрономии, механики, коммерции — стали быстро совершенствоваться приемы вычислений. В 1427 г. аль-Каши, который работал в Самаркандской обсерватории Улугбека, подробно описал систему десятичных дробей и правила выполнения действий над ними. К концу XVII ст. было осознано фундаментальное значение арифметики для математической науки.

Аксиоматическое построение арифметики относится к XIX столетию, в середине которого немецкому математику Г. Грассману (1809—1877) (рис. 386) удалось выбрать систему аксиом, определяющих действия сложения и вычитания. Исследования, начатые Г. Грассманом, были завершены итальянским математиком Дж. Пеано (1858—1932) (рис. 387), который отчетливо выделил систему основных, неопределяемых понятий и сформулировал исходные свойства этих понятий, которые принимаются в качестве аксиом.

Неопределяемыми понятиями теории натуральных чисел являются: число 1; натуральное число; отношение непосредственного следования; сложение натуральных чисел; умножение натуральных чисел. Отношение непосредственного

следования выражает наши представления о том, что каждое натуральное число имеет следующее, т. е. число, которое при счете называется следующим после очередного названного числа. Например, непосредственно следующим за числом 1 является число 2, непосредственно следующим за числом 2 — число 3, непосредственно следующим за числом 123 — число 124. Непосредственно следующее за натуральным числом a обозначается как a' , сумма чисел a и b — как $a + b$, произведение чисел a и b — как $a \cdot b$.

Основные понятия описываются их следующими исходными свойствами (аксиомами).

1. Число 1 — натуральное число, которое непосредственно не следует ни за каким натуральным числом a , т. е. $a' \neq 1$.

2. Каждое натуральное число a имеет непосредственно следующее за ним, и это непосредственно следующее число единственное, т. е. если $b = a'$ и $c = a'$, то $b = c$.

3. Каждое натуральное число a непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом, т. е. если $b' = a$ и $c' = a$, то $b = c$.

4. Число, непосредственно следующее за натуральным числом, получается прибавлением к этому числу единицы, т. е. $a + 1 = a'$.

5. Прибавление к натуральному числу a непосредственно следующего числа за другим натуральным числом b можно заменить нахождением непосредственно следующего за суммой $a + b$ числа, т. е. $a + b' = (a + b)'$.

6. При умножении натурального числа a на число 1 получается число a , т. е. $a \cdot 1 = a$.

7. Умножение натурального числа a на число, непосредственно следующее за другим натуральным числом b , можно заменить нахождением суммы произведения $a \cdot b$ и числа a , т. е. $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

8. Если утверждение $P(n)$ истинно для натурального числа 1 и из того, что утверждение $P(n)$ истинно для натурального числа k следует истинность утверждения $P(n)$ для натурального числа $k + 1$, то утверждение $P(n)$ истинно для любого натурального числа n .

Аксиома 8 называется *аксиомой математической индукции*. Она дает возможность доказывать общие утверждения о натуральных числах. Математическая индукция в современном понимании впервые встречается в работах Б. Паскаля (1623—1662) (рис. 388).

Пример 1. Докажем формулу $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ для суммы n первых членов геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q .

Пусть $n = 1$. Тогда $S_1 = a_1$, так как сумма S_1 состоит только из одного числа a_1 . С другой стороны, данная формула дает:

$S_1 = a_1 \cdot \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q - 1}{q - 1} = a_1$, т. е. тот же результат. Можно сделать вывод, что доказываемая формула истинна при $n = 1$.

Пусть формула истинна для $n = k$, т. е. истинна формула $S_k = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$. Докажем, что при этом условии истинна и формула $S_{k+1} = a_1 \cdot \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$, полученная из доказываемой формулы подстановкой $k + 1$ вместо n . Имеем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1} = \\ &= S_k + a_{k+1} = a_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = a_1 \cdot \left(\frac{q^k - 1}{q - 1} + q^k \right) = \\ &= a_1 \cdot \frac{q^k - 1 + q^k(q - 1)}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \end{aligned}$$

т. е. получили ожидаемый результат. Таким образом, мы установили, что из истинности утверждения для $n = k$ следует его истинность для $n = k + 1$.

Учитывая аксиому математической индукции, делаем вывод о том, что формула $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ истинна при любом натуральном значении переменной n .

Пример 2. Докажем, что сумма квадратов первых n нечетных натуральных чисел равна $\frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1)$, т. е. что

$$S_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1).$$

Пусть $n = 1$. Тогда $S_1 = 1$, так как первое нечетное натуральное число — это число 1. Вместе с этим для значения выражения $\frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1)$ при $n = 1$ получим: $\frac{1}{3} \cdot 1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1$, т. е. тот же результат.

Пусть утверждение истинно для $n = k$, т. е. истинна формула $S_k = \frac{1}{3} k(2k - 1)(2k + 1)$. Докажем, что тогда утверждение истинно и при $n = k + 1$, т. е. истинно равенство $S_{k+1} = \frac{1}{3} (k + 1)(2k + 1)(2k + 3)$. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^2 + 3^2 + \dots + (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 = \\ &= (1^2 + 3^2 + \dots + (2k - 1)^2) + (2k + 1)^2 = \\ &= \frac{1}{3} k(2k - 1)(2k + 1) + (2k + 1)^2 = \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1)(k(2k - 1) + 3(2k + 1)) = \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1)(2k^2 - k + 6k + 3) = \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1)(2k^2 + 5k + 3) = \\ &= \frac{1}{3} (2k + 1)(2k + 3)(k + 1) = \\ &= \frac{1}{3} (k + 1)(2k + 1)(2k + 3), \end{aligned}$$

т. е. получили ожидаемый результат. Таким образом, мы установили, что из истинности утверждения для $n = k$ следует его истинность для $n = k + 1$.

Учитывая аксиому математической индукции, делаем вывод о том, что формула $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n(2n - 1)(2n + 1)$ истинна при любом натуральном значении переменной n .

Есть утверждения о натуральных числах, которые истинны не для всех натуральных чисел, а для тех, которые начинаются с определенного числа. При доказательстве таких утверждений также можно использовать аксиому математической индукции, но первый этап доказательства — проверку истинности утверждения для наименьшего натурального числа — начинают не с числа 1.

Пример 3. Докажем, что если натуральное число n не меньше 5, то $2^n > n^2$.

Пусть $n = 5$. Тогда, подставив это значение переменной n в неравенство $2^n > n^2$, получим неравенство $2^5 > 5^2$, которое истинно.

Пусть при $n = k$, где $k > 4$, неравенство $2^n > n^2$ истинно, т. е. истинно неравенство $2^k > k^2$. Докажем, что тогда истинно и неравенство $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

Имеем $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$. Учитывая допущение $2^k > k^2$, получим $2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$. Значит, $2^{k+1} > 2 \cdot k^2$.

Докажем, что $2 \cdot k^2 > (k+1)^2$. Выполним равносильные преобразования этого неравенства:

$$2 \cdot k^2 > (k+1)^2 \equiv 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \equiv k^2 - 2k - 1 > 0 \equiv \\ \equiv (k^2 - 2k + 1) - 2 > 0 \equiv (k-1)^2 - 2 > 0.$$

Но неравенство $(k-1)^2 - 2 > 0$ истинно, так как по условию переменная k не меньше 5. Значит, истинно и неравенство $2 \cdot k^2 > (k+1)^2$. Учитывая, что $2^{k+1} > 2 \cdot k^2$, можем утверждать, что $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Аксиома математической индукции позволяет сделать вывод о том, что неравенство $2^n > n^2$ истинно при всех натуральных значениях переменной n , не меньших 5.

- ? 1. Назовите основные понятия аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Объясните смысл отношения непосредственного следования между натуральными числами.
3. Сформулируйте аксиому математической индукции.

1149. Установите, являются ли пифагоровыми тройками числа:

- а) (5; 12; 13); г) (20; 21; 29); ж) (20; 99; 101);
б) (7; 24; 25); д) (12; 35; 37); з) (15; 112; 115).
в) (6; 8; 12); е) (9; 40; 41);

1150. Найдите третье число пифагоровой тройки чисел, если два из них следующие:

- а) 11 и 60; б) 16 и 63; в) 13 и 84; г) 88 и 105.

1151. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого числа. Например, число 6 — совершенное, так как его не равные шести делители — это числа 1, 2, 3 и $6 = 1 + 2 + 3$. Докажите, что является совершенным число:

- а) 28; б) 496; в) 8128; г) 33 550 336.

1152. Докажите иррациональность числа:

- а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[4]{5}$.

1153. Выражением $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n . Найдите значение выражения:

- а) $6!$; б) $10!$; в) $\frac{12!}{10!}$; г) $\frac{13! - 8!}{10! + 8!}$.

1154. Сформулируйте признаки делимости на 2 и на 5 и определите, делится ли на эти числа число:

- а) 24 728; б) 142 745; в) 197 820; г) 345 777.

1155. Сформулируйте признаки делимости на 3 и на 9 и определите, делится ли на эти числа число:

- а) 24 729; б) 272 745; в) 197 820; г) 345 777.

1156. Найдите значение выражения:

- а) $\left(47 \frac{1}{5} : 12 - 20 : 6 \frac{3}{7}\right) : 0,1 - 1 \frac{35}{36}$;
б) $\left(49 \frac{1}{3} : 16 - 14 : 11,2\right) : 0,5 - \frac{1}{6}$;
в) $3 \frac{3}{4} : \left(7 \frac{1}{4} - 2 \frac{2}{3}\right) - \left(2 \frac{1}{15} + 1 \frac{7}{12}\right) : 1 \frac{33}{40}$;
г) $\left(5 \frac{1}{12} - 3 \frac{11}{24}\right) : 2,25 + \left(3 \frac{1}{18} - 2 \frac{7}{12}\right) \cdot \frac{4}{7}$.

1157. Найдите значение выражения:

- а) $((8 + 4(7 - 15) : 2 - 5) \cdot 4 - 11) : (2 - 9)$;
б) $\left(\left(2 \frac{1}{5} \cdot 0,2 - 1\right)\left(1,9 - 0,3 : 1 \frac{1}{4} - 0,8 : 8\right) \cdot 10 - \right. \\ \left. - 0,033 \cdot 8 - 10\right) : 2$;
в) $\left(\left(\frac{0,025 - 1 \frac{1}{5}}{2,4 + 0,1} + \frac{10 - 2,5}{\frac{1}{2} - 0,75} + \frac{6 \frac{3}{5} - 1,75}{5} + \frac{5,625}{2 \frac{1}{4}}\right) : \frac{1 : 1,6 - 0,25}{3 \frac{3}{4} : 11 - 0,5}\right) \cdot \frac{1}{9}$.

1158. Докажите, что:

- а) сумма n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$;
б) сумма n первых нечетных натуральных чисел равна n^2 ;
в) сумма n первых четных натуральных чисел равна $n(n+1)$;
г) сумма n первых натуральных чисел, кратных трем, равна $\frac{3}{2} n(n+1)$;
д) сумма n первых натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1, равна $\frac{1}{2} n(3n-1)$;
е) сумма n первых натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2, равна $\frac{3}{2} n^2$.

1159. Найдите и докажите формулу, выражающую сумму n первых натуральных чисел, которые:

- а) кратны трем;
- б) при делении на 4 дают в остатке 1;
- в) при делении на 4 дают в остатке 2;
- г) при делении на 4 дают в остатке 3.

1160. Докажите, что сумма квадратов n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1161. Докажите, что сумма квадратов первых n четных натуральных чисел равна $\frac{4n \cdot (2n-1)(2n+1)}{3}$.

1162. Докажите, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

1163. Докажите, что при любом натуральном значении переменной n истинно равенство:

- а) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$;
- б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
- в) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;
- г) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

1164. Докажите, что:

а) при любых натуральных значениях переменных n и p истинно равенство

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p(p+1) + \dots + n(n+1) \dots (n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+p)}{p+1};$$

б) при любом натуральном значении переменной n истинно равенство

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 4}.$$

1165. Докажите, что при любом натуральном значении переменной n истинно равенство:

- а) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;
- б) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;
- в) $(n+1)(n+2) \dots (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n-1)$.

1166. Докажите, что при любых натуральных значениях переменных a и n истинно равенство:

- а) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$;
- б) $\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a+7}{8} + \dots + \frac{a+2^n-1}{2^n} = \frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n} + n$.

1167. Докажите, что на 9 делится:

- а) сумма кубов трех последовательных натуральных чисел;
- б) значение выражения $4^n + 15n - 1$ при любом натуральном значении переменной n .

1168. Докажите, что при любом натуральном значении переменной на 64 делится значение выражения:

- а) $3^{2k-1} + 40k + 21$;
- в) $4 \cdot 3^{2m+2} + 32m - 36$.
- б) $3^{2l+3} + 40l - 27$;

1169. Докажите, что при любом натуральном значении переменной:

- а) значение выражения $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133;
- б) значение выражения $10^p + 18p - 1$ делится на 27;
- в) значение выражения $3^{2q+3} - 26q - 27$ делится на 169;
- г) значение выражения $2^{r+2} \cdot 3^r + 5r - 4$ делится на 35.

1170. Докажите, что при любом четном значении переменной n значение выражения $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323.

1171. Докажите, что при натуральном значении переменной, которое:

- а) не меньше 3, истинно неравенство $2^n > 2n + 1$;
- б) не меньше 10, истинно неравенство $2^n > n^3$;
- в) больше 2, истинно неравенство $2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$.

1172. Докажите, что при натуральном значении переменной, большем 1, истинно неравенство:

- а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$;
- в) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;
- б) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$;
- г) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

1173. Докажите, что для любых целых положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ истинно неравенство $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

1174. Докажите, что при любом натуральном значении переменной n , которое:

а) больше единицы, истинно неравенство: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

б) не меньше 6, истинно неравенство: $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

1175. Найдите значение выражения:

а) $((6 + 4(3 - 11) : 2 - 1) \cdot 4 - 7) : (2 - 9)$;

б) $\left(\left(2\frac{1}{5} \cdot 0,2 - 1\right)\left(1,9 - 0,3 : 1\frac{1}{4} - 0,8 : 8\right) \cdot 10 - 0,033 \cdot 8 - 10\right) : 2$;

в) $\frac{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 400} : (6,79 : 0,7 + 0,3)$.

1176. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2}{2z-s} + \frac{6s}{s^2-4z^2} - \frac{4}{2z+s}\right) : \left(1 + \frac{4z^2+s^2}{4z^2-s^2}\right)$;

б) $\left(\frac{d-2e}{d^3+e^3} + \frac{6e}{d^3-d^2e+de^2}\right) \cdot \frac{d^3-de^2}{d^2+e^2} + \frac{2e^2}{d^3+d^2e+de^2+e^3}$;

в) $\left(\left(\frac{l-k}{l+k}\right)^2 - \left(\frac{l+k}{l-k}\right)^2\right) : \frac{8l^3+8lk^2}{l^3+l^2k-lk^2-k^3} + \frac{k}{l+k} \cdot \left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right)$;

г) $\left(\frac{3(a+2)}{2(a^3+a^2+a+1)} + \frac{2a^2-a-10}{2(a^3-a^2+a-1)}\right) : \left(\frac{5}{a^2+1} + \frac{3}{2(a+1)} - \frac{3}{2(a-1)}\right)$.

1177. Упростите выражение:

а) $\frac{r-t}{r^{0,5}-t^{0,5}} - \frac{r^{1,5}-t^{1,5}}{r-t}$;

б) $\frac{h^{0,5}-g^{-0,5}}{h^{-0,5}-g^{0,5}} - \frac{h^{-0,5}+g^{0,5}}{h^{0,5}+g^{-0,5}}$;

в) $\frac{f+j}{f^{\frac{2}{3}}-f^{\frac{1}{3}}j^{\frac{1}{3}}+j^{\frac{2}{3}}} + \frac{f-j}{f^{\frac{2}{3}}+f^{\frac{1}{3}}j^{\frac{1}{3}}+j^{\frac{2}{3}}} - \frac{f^{\frac{2}{3}}-j^{\frac{2}{3}}}{f^{\frac{1}{3}}-j^{\frac{1}{3}}}$;

г) $\frac{(c-b)^2}{c^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2-b^2}{\left(c^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(c+c^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}$.

1178. Найдите значение выражения:

а) $\left(1 + \frac{q^{-z}+s^{-z}}{q^{-z}-s^{-z}}\right)$ при $q=3$; $s=0,75$; $z=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{l-k}{l^{\frac{3}{4}}+l^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}} - \frac{l^{\frac{1}{2}}-k^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{4}}+k^{\frac{1}{4}}}$ при $l=\frac{1}{16}$; $k=\frac{1}{31}$.

1179. Решите уравнение:

а) $2b(3b-2)\left(1-(2-b)(2b+3)-\frac{b-3}{2}\right)=13$;

б) $3\left(h-\frac{3h-1}{4}-\left(1-2\left(h-\frac{3+h}{5}\right)\right)\right)=5h-2$;

в) $\frac{1}{(h+1)^2} + \frac{4}{h(h+1)^2} = \frac{5}{2h(h+1)}$;

г) $\frac{2y+19}{5y^2-5} - \frac{17}{y^2-1} - \frac{3}{1-y} = 0$;

д) $\frac{3e-3}{2e^2-2} - \frac{2e+2}{3e^2+6e+3} = \frac{5(e-1)}{12e^2-24e+12}$;

е) $\frac{6}{4-p} = \frac{25}{1-3p} - \frac{16}{p-4}$.

1180. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3q+1-\frac{3(a-5q)}{4}=q-\frac{27q+22}{8}, \\ a+3-\frac{5a-9q}{6}=3q-\frac{3-5a}{9}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{s+2d}{4} - \left(s - \frac{1}{3}d\right) = 1+d, \\ \frac{d+3}{6} + \frac{2-s}{2} = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{2(3z-c)}{5} + \frac{3c-10z}{3} + 2z+1, \\ \frac{4z-3c}{3} + \frac{8z-3c}{2}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{f+1}{3} - \frac{g+2}{4} = \frac{2(f-g)}{5}, \\ \frac{f-3}{4} - \frac{g-3}{3} = 2g-f. \end{cases}$

1181. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{(a+4)(2a-1)} < 2(a+4)$; г) $\frac{\sqrt{17-15f-2f^2}}{f+3} > 0$;
 б) $\sqrt{(s+2)(s-5)} < 8-s$; д) $\sqrt{9g-20} < g$;
 в) $\sqrt{d^2-d-12} < d$; е) $\sqrt{h^2-4h} > h-3$.

1182. Найдите площадь прямоугольника с периметром 72, диагонали которого пересекаются под углом 60° .

1183. Медиана прямоугольного треугольника длиной m делит его прямой угол в отношении $1:2$. Найдите площадь треугольника.

1184. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c , а один из его углов — 60° . Найдите радиус окружности с центром в вершине этого угла, которая данный треугольник делит на две равновеликие части.

1185. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.

1186. Найдите острый угол ромба, сторона которого является средним геометрическим его диагоналей.

1187. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны друг другу. Найдите площадь четырехугольника.

1188. Найдите площадь четырехугольника, ограниченно-го всеми биссектрисами параллелограмма со сторонами a и b и углом α .

1189. Из Сенно в Богусевск выехал велосипедист, а через некоторое время навстречу ему из Богусевска выехал второй велосипедист, который встретил первого меньше чем через час, не доехав до Оболи 1 км. Велосипедисты сближались со скоростью 36 км/ч, и первый был в дороге 1 ч 15 мин (рис. 389). Найдите расстояние от Сенно до Оболи, учитывая, что средняя скорость движения велосипедистов оказалась равной 17,5 км/ч.

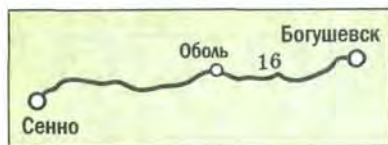


Рис. 389

1190. Есть три вида коробок для укладывания конфет. В первой из них — 6 рядов, вторая вмещает всего 12 конфет, а если сложить количества конфет в одном ряду обеих коробок, то по-

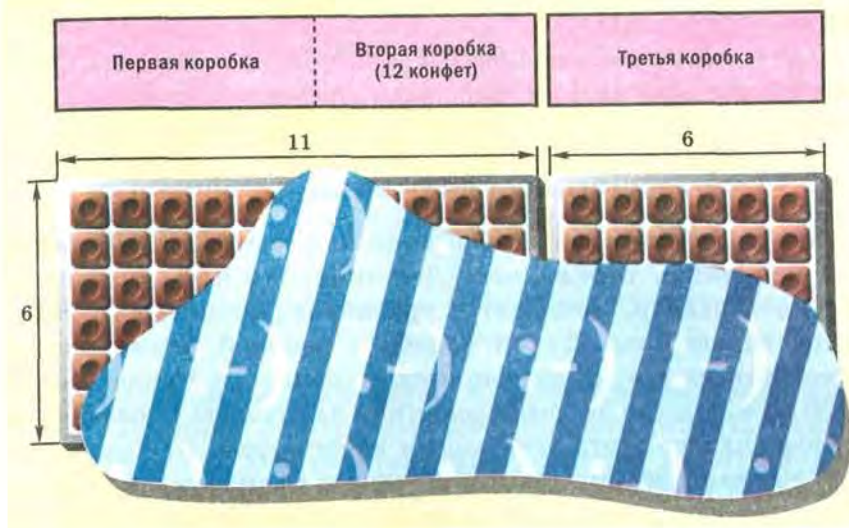


Рис. 390

лучится 11. Третья коробка имеет столько рядов и вмещает столько конфет, сколько их вместе в первой и второй коробках (рис. 390). Найдите количество рядов конфет в третьей коробке, учитывая, что в одном ее ряду вмещается 6 конфет.

1191. Есть три цилиндра. Площадь основания одного из них равна 9 см^2 , объем второго — 121 см^3 , а если поставить первый цилиндр на второй, то получится тело высотой 18 см. Третий цилиндр имеет высоту 9,2 см, его объем равен общему объему, а площадь основания — общей площади оснований первого и второго цилиндров (рис. 391). Найдите объем третьего цилиндра, учитывая, что объем V цилиндра находится по формуле $V = S \cdot H$, где S — площадь основания цилиндра, а H — его высота.

1192. Докажите, что при целых m , больших 2, уравнение $x^3 - mx + 1 = 0$ не имеет рациональных корней.



Рис. 391

1193. Как восстановить пятиугольник по известным серединам его сторон?

1194. Есть ли таких 4 натуральных числа, чтобы наименьшие общие кратные их пар были последовательными числами?

27*. Логические основы алгебры

Алгебра возникает из арифметики с введением неизвестной величины, *переменной*. Действия над ней, указанные условием задачи, приводят к уравнению, из которого находится неизвестная. Такой подход в неявной форме можно усмотреть уже в древнеегипетском папирусе Ринда (около 2000 до н. э.), где искомая величина называлась словом *куча* и обозначалась соответствующим иероглифом. Из клинописных математических текстов Древнего Вавилона стало известно, что вавилоняне умели решать разнообразные задачи, причем некоторые из них сводились к квадратным уравнениям.

Понятно, что в те времена арифметика и алгебра не были отделены друг от друга и древняя математика была единой. В Древней Греции отчетливо выделилась геометрия, которая нашла свое определенное завершение в *Началах* Евклида, где геометрия была изложена аксиоматически. Влияние этого метода было настолько большим, что многие проблемы переводились на геометрический язык: величины истолковывались как длины отрезков, произведение величин — как площадь прямоугольника и т. д. Результаты развития арифметики и в ней алгебры подытожены в *Арифметике* Диофанта, где он уже довольно свободно оперирует уравнениями первой и второй степени и в зародышевой форме пользуется отрицательными числами.

Достижения древнегреческой науки были восприняты учеными средневекового Востока, среди которых заметное место занимали ученые Средней Азии аль-Хорезми (787—850) (рис. 392) и аль-Бируни (973—1048) (рис. 393). Аль-Хорезми в своей работе *Краткая книга пополнения и противопоставления* впервые рассматривает алгебру как самостоятельную ветвь математики, систематически решает уравнения первой и второй степени. Этот трактат долгое время был основной книгой по алгебре в странах Европы, а название операции *аль-джебр*, которая заключалась в переносе члена урав-



Рис. 392



Рис. 393



Рис. 394

нения из одной части в другую с изменением его знака, позже стала названием *Алгебра* соответствующего раздела математики. Имя аль-Хорезми (латинизированное *Algorithmi*) вошло в математику как общее название *Алгоритм* любой системы вычислений, выполняемых по определенным правилам.

Математики средневекового Востока изложение вели словами. Дальнейший прогресс стал возможным, когда в общее употребление вошла удобная символика. Этот процесс был длительным и извилистым. Современный алгебраический аппарат сложился в основном к концу XVI ст. и был окончательно закреплен французским математиком Ф. Виетом (1540—1603) (рис. 394). В 1591 г. он впервые вводит буквенные обозначения не только для неизвестных величин, что уже делалось и ранее, но и для данных, т. е. для коэффициентов уравнений. Это позволило выражать свойства уравнений и их корней общими формулами, а сами выражения с переменными стали объектами, над которыми можно выполнять те или иные действия.

Важным этапом в развитии алгебры стало введение отрицательных чисел. До этого даже уравнение первой степени не всегда имело решение. Решающий шаг — пользование отрицательными числами — был сделан в X ст. индийскими математиками. В Европе отрицательные числа утвердились только в XVII ст. после того, как французский философ и математик Р. Декарт (1596—1650) (см. рис. 205) использовал их наглядное геометрическое представление для аналитической геометрии, в которой геометрические образы — линии, поверхности — получают алгебраическое истолкование уравнениями. К концу XVIII ст. алгебра сложилась примерно в том объеме, в котором она и теперь преподается в школе.

Основным объектом изучения школьной алгебры является выражение с переменными, которое образуется из чисел и переменных с помощью действий. Другие объекты изучения школьной алгебры — уравнение, неравенство, числовая функция — вводятся на основании понятия выражения с переменными.

Уравнение $F = G$ образуется из двух выражений F и G с помощью отношения *равно*, а неравенства $F < G$, $F > G$, $F \neq G$, $F \geq G$, $F \leq G$ образуются из этих выражений с помощью отношений *меньше*, *больше*, *не равно*, *не больше*, *не меньше*. Функция $y = f(x)$ возникает, когда по отношению к выражению $f(x)$ ставится вопрос о том, как себя ведут значения y выражения $f(x)$ в зависимости от значений переменной x .

В школе выражения рассматриваются на множестве действительных чисел, выступающем в качестве области значений переменной. Свойства выражения определяют те действия, которые использованы при его образовании. Вы изучали действия сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, нахождения значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса. В основе этого набора действий лежат действия сложения и умножения. Например, вычитание — это действие, обратное сложению, синус угла определяется как отношение двух расстояний, первое из которых есть расстояние от произвольной точки на одной стороне угла до другой стороны, второе — расстояние от этой точки до вершины угла, возведение в степень определяется следующим образом:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$, если a — любое действительное число и n — натуральное число;

$a^1 = a$, если a — любое действительное число;

$a^0 = 1$, если a — не равное нулю действительное число;

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если a — положительное число и $\frac{m}{n}$ — дробное рациональное число с целым числителем m и натуральным знаменателем n .

Таким образом, в качестве исходных понятий школьного курса алгебры целесообразно принять понятия: действительное число; переменная, сложение; умножение.

Действия вычитания и деления, отношение *меньше* между числами вводятся определениями:

$a - b$ обозначает такое число c , что $a + c = b$;

$a : b$ обозначает такое число c , что $ac = b$;

$a < b$ означает, что существует такое положительное число c , что $a + c = b$.

Аксиомы описывают действия сложения, вычитания, умножения и деления, а также отношение *меньше*.

а) Свойства сложения и вычитания

- 1) $a + b = b + a$ (*переместительность сложения*);
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (*сочетательность сложения*);
- 3) $a + 0 = a$ (*свойство нуля при сложении*);
- 4) $a + (-a) = 0$ (*свойство противоположного числа*);
- 5) $a - b = a + (-b)$ (*связь вычитания со сложением*);
- 6) если $a < b$, то $a + c < b + c$ (*монотонность сложения*).

б) Свойства умножения и деления

- 7) $a \cdot b = b \cdot a$ (*переместительность умножения*);
- 8) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (*сочетательность умножения*);
- 9) $a \cdot 1 = a$ (*свойство единицы при умножении*);
- 10) $a \cdot 0 = 0$ (*свойство нуля при умножении*);
- 11) $-a = (-1) \cdot a$ (*представление противоположного числа произведением*);

12) если $a \neq 0$, то $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (*свойство обратного числа*);

13) если $b \neq 0$, то $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (*представление дроби произведением*);

14) $a \cdot (b + c) = ab + ac$ (*распределительность умножения по отношению к сложению*);

15) если $a < b$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$ (*монотонность умножения*).

в) Свойства порядка

16) если a, b — действительные числа, то или $a < b$, или $a = b$, или $a > b$ (*линейная упорядоченность*);

17) если $a < b$, то найдется такое число c , что $a < c < b$ (*плотность множества действительных чисел*);

18) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (*транзитивность отношения меньше*).

г) Архимедово свойство

19) Для любого действительного числа x найдется такое натуральное число n , что $n > x$.



Рис. 395

д) Свойство непрерывности множества действительных чисел

20) Любая система вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ (рис. 395), длины

которых стремятся к нулю, когда n неограниченно увеличивается, имеет общую точку.

Свойства а) — д), по существу, составляют полную систему аксиом для действительных чисел, а свойства а) — г) — полную систему аксиом для рациональных чисел. В курсах арифметики и алгебры вы познакомились со всеми свойствами а) — г) и использовали их при доказывании правил тождественных преобразований выражений, установлении правил равносильных преобразований уравнений.

В школьном курсе алгебры вы изучали разные классы выражений с переменными, которые определяются набором действий, используемых при их образовании.

Если выражение с переменными образовано с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень и деления на число, то его называют *целым выражением*. Каждое целое выражение равносильными преобразованиями можно свести к многочлену стандартного вида.

Если выражение, кроме действий, используемых при образовании целого выражения, содержит хотя бы одно действие деления на выражение с переменными, то его называют *дробно-рациональным выражением*.

Целые выражения вместе с дробно-рациональными выражениями образуют множество *рациональных выражений*. Любое рациональное выражение равносильными преобразованиями можно свести к рациональной дроби или целому выражению.

Если выражение, кроме действий, используемых при образовании рационального выражения, содержит хотя бы одно действие извлечения корня из выражения с переменными, то его называют *иррациональным выражением*.

Рациональные выражения вместе с иррациональными выражениями образуют множество *алгебраических выражений*.

При образовании алгебраических выражений используются действия сложения, вычитания, умножения, деления,



Рис. 396

возведения в рациональную степень. Эти действия называют вместе *алгебраическими действиями*. Действия нахождения значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса относят к *трансцендентным действиям*. Выражение, при образовании которого использовано хотя бы одно трансцендентное действие над выражением с переменной, называется *трансцендентным выражением*. Из трансцендентных выражений вам пока что известны только тригонометрические выражения.

Отношения между разными видами выражений наглядно представляет схема на рисунке 396.



1. Как из выражений с переменными образуется уравнение; неравенство?
2. Как понятие числовой функции связано с понятием выражения с переменными?
3. Как действие вычитания и отношение *меньше* определяются через действие сложения?
4. Как действие деления определяется через действие умножения?
5. Как определяется действие возведения в степень?
6. С помощью каких действий образуется целое выражение и к какому виду такое выражение можно свести тождественными преобразованиями?

7. С помощью каких действий образуется дробно-рациональное выражение?
8. Какие выражения составляют множество рациональных выражений и к какому виду можно свести тождественными преобразованиями рациональное выражение?
9. С помощью каких действий образуется иррациональное выражение?
10. Какие выражения составляют множество алгебраических выражений и с помощью каких действий они образуются?
11. Какие действия называют алгебраическими, какие — трансцендентными?

1195. Сформулируйте известные вам правила проверки вычитания сложением и вычитанием. Запишите их с помощью переменных и проиллюстрируйте на примере $25 - 17 = 8$.

1196. Сформулируйте известные вам правила проверки деления умножением и делением. Запишите их с помощью переменных и проиллюстрируйте на примере $25 \cdot 8 = 200$.

1197. Сформулируйте правила проверки действия извлечения корня действием возведения в степень. Запишите его с помощью переменных и проиллюстрируйте на примере $3^4 = 81$.

1198. Найдите значение выражения $96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ при значении переменной n , равном:

- а) -5; б) -1; в) 0; г) 2; д) 7; е) 10.

1199. Запишите выражение в виде степени с основанием 2:

- а) $16 \cdot 2^n$; в) $8^5 \cdot 4^n$; д) $\frac{8^{n-2}}{4^{n-3}}$;
 б) $8 \cdot 2^{n-1}$; г) $16^3 \cdot 4^{n-8}$; е) $\frac{32^{2n-1}}{4^{5n-3}}$.

1200. Установите, существует ли такое значение переменной x , при котором функция, заданная формулой $y = 4x^2 - 5x + 7$, принимает значение, равное:

- а) 3; б) 6.

1201. Графиком функции f служит луч с началом в точке $A(3; 5)$, параллельный оси x и расположенный в первом координатном угле. Постройте этот график и укажите область определения и область значений функции.

1202. Установите, может ли функция $y = x^2 + 14x + 15$ принимать значение, равное:

- а) -1; б) -3; в) -5.

1203. Преобразуйте произведение $(b - 10)(b^2 + 10b + 100)$ в многочлен стандартного вида:

- а) по правилу умножения многочлена на многочлен;
 б) по формуле $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

1204. Преобразуйте в многочлен стандартного вида произведение:

- а) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;
 б) $(p - 5)(p^2 + 5p + 25)$;
 в) $(y + 4)(y^2 - 4y + 16)$;
 г) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$;
 д) $(10m - 3n)(100m^2 + 30mn + 9n^2)$;
 е) $(4u + 5v)(16u^2 - 20uv + 25v^2)$.

1205. Представьте произведением многочлен:

- а) $p^6 + q^6$; в) $k^6 - 1$; д) $a^6 - 64$;
 б) $m^6 - n^6$; г) $l^6 + 1$; е) $64c^6 - d^6$.

1206. Запишите произведением двучлена и трехчлена выражение:

- а) $(r + 6)^3 - 1$; в) $(t + 3)^3 - 64$;
 б) $(s - 2)^3 + 27$; г) $a^3 + (a - b)^3$.

1207. Докажите тождество

$$(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n$$

и, используя его, запишите многочленом выражение:

- а) $(a - 1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$;
 б) $(b - 2)(b^3 + 2b^2 + 4b + 8)$;
 в) $(c - 3)(c^4 + 3c^3 + 9c^2 + 27c + 81)$.

1208. Сократите дробь:

- а) $\frac{x^5 - 1}{x - 1}$; б) $\frac{y^7 - 1}{2y - 2}$.

1209. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:

- а) $(u - 4)(u^2 + 4u + 16)$; б) $(v + 10)(v^2 - 10v + 100)$;

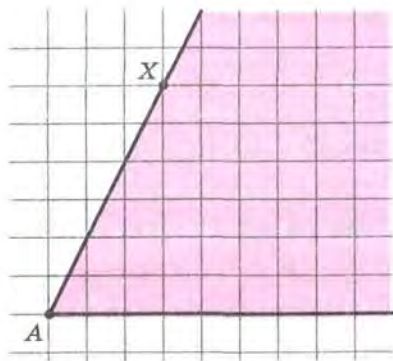


Рис. 397

приближенное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса этого угла.

1211. Есть выражения:

$$x; a + \frac{b}{4}; a + \frac{b}{u+2}; x + 2x^2; t + \sin t;$$

$$\sqrt{47}; v^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; v^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{v}}; z; \sin \alpha;$$

$$5\frac{1}{3}; \cos \sqrt[6]{a+b}; 1 - \frac{2}{\operatorname{tg} 3}; 1 - \frac{2}{\operatorname{tg} 2\beta}; \sqrt[4]{\frac{y}{7}}.$$

Какие из них являются:

- числовыми выражениями;
- выражениями с переменными;
- целыми выражениями;
- дробно-рациональными выражениями;
- рациональными выражениями;
- иррациональными выражениями;
- алгебраическими выражениями;
- трансцендентными выражениями?

1212. Упростите выражение:

а) $(2q - 3y)(3q - 2y);$

б) $(e + r + t)(e + r - t);$

в) $(y^3 - y^2b + yb^2 - b^3)(y + b);$

г) $(z - 1)(z - 2)(z - 3);$

д) $(f + g)^2(f - g);$

е) $(h^2 - j^2)\left(\frac{h}{j} + \frac{j}{h}\right);$

ж) $\left(\frac{2k}{3l} - \frac{5l}{4k}\right)\left(\frac{3k}{2l} + \frac{4l}{5k}\right);$

з) $(s + d)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{d}\right).$

в) $(w - 1)(w^3 + w^2 + w + 1);$

г) $(q - r)(q^3 + q^2r + qr^2 + r^3).$

1210. Дайте определения действиям нахождения значений синуса угла, косинуса угла, тангенса угла и котангенса угла и объясните, как они связаны с действием умножения. Начертите в тетради такой же угол, как на рисунке 397. Выполните необходимые построения и измерения и найдите

1213. Разложите на множители выражение:

а) $s^3 + s^2 - s - 1;$

б) $t^4 - t^3 - t + 1;$

в) $d^5 - d^4 - d + 1;$

г) $e^2 - 7er + 12r^2;$

д) $3z^2f^2 - z^4 - f^4;$

е) $m^4 + m^2n^2 + n^4;$

ж) $(q^2 + qd - d^2)^2 - (q^2 - qd - d^2)^2;$

з) $s^2d^2 + r^2t^2 - s^2r^2 - d^2t^2 + 4sdrt;$

и) $x^2 - 6xk + 8k^2 + 2kl - l^2.$

1214. Упростите выражение:

а) $\frac{er - tr + ei - ti}{er + tr + ri + ti};$

б) $\frac{jh + jg + h^2 + hg}{jf + jd + hf + hd};$

в) $\frac{(j+g)^2 - f^2}{j+g+f};$

г) $\frac{t^{i+2}r^{i-2} - t^{i-2}r^{i+2}}{t^{i+1}r^{i-1} - t^{i-1}r^{i+1}};$

д) $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1};$

е) $\frac{1 - 3c + 3c^2 - c^3}{b - bc + p - pc};$

ж) $\frac{z^2 - xz + yz - xy}{z^3 + yz^2 + xz + xy};$

з) $\frac{a^{p+2} - 2a^p + a^{p-2}}{a^{p+2} - a^{p+1} + a^{p-1} - a^{p-2}}.$

1215. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1-p} - \frac{2p}{1-p^2};$

б) $\frac{e+1}{2e-2} - \frac{e-1}{2e+2} - \frac{4e}{e^2-1} + \frac{e^2+1}{e^2-1};$

в) $\frac{t+y}{t^2-ty+t^2} - \frac{2ty}{t^3+y^3};$

г) $\frac{6r+6e}{re+2r^2} + \frac{8}{e-2r} - \frac{4r+2e}{e^2-4r^2};$

д) $\frac{p}{p^2+q^2} - \frac{q}{p^2-q^2} + \frac{pq(p+q)}{p^4-q^4};$

е) $2(l-k) + \frac{l^2+k^2}{l+k};$

ж) $2j+h - \frac{2jh^2+3h^3}{j^2+h^2};$

з) $\frac{g^2+f^2}{g-f} - 3(g+f).$

1216. Найдите значение выражения:

а) $\left(\left(1 - \frac{2}{1-3q}\right) \cdot \left(1 - \frac{9q-9q^2}{3q+1}\right)\right) : 2(1-9q^2)$ при $q = -\frac{1}{2};$

б) $\frac{2}{s} - \left(\frac{s+1}{s^8-1} - \frac{1}{s^2+s+1} - \frac{2}{1-s}\right) : \frac{s^3+s^2+2s}{s^2-1}$ при $s = 1\frac{1}{2};$

в) $\frac{3}{2} - \left(\frac{(0,5d+1)d}{d^3-1} + \frac{1}{2-2d} + \frac{1}{d^2+d+1}\right) \cdot \frac{d^3+d^2+d}{d-1}$ при $d = 2,5;$

г) $\left(\frac{z+x}{z^3x+z^2-zx-1} + \frac{zx+1}{1-z^2} : (z+x)\right) \cdot \frac{z^3+x^3}{3-3x^2}$ при $x = 1$ и $z = -\frac{3}{2}.$

1217. Упростите выражение:

$$a) \left(\frac{m}{n+m} + n \right) \left(\frac{n}{n-m} - m \right) - \left(\frac{n}{n+m} + m \right) \left(\frac{m}{n-m} - n \right);$$

$$б) \frac{1}{e(e-r)(e-t)} + \frac{1}{r(r-e)(r-t)} + \frac{1}{t(t-e)(t-r)};$$

$$в) \frac{1}{s-f} + \frac{1}{d-s} + \frac{1}{f-d}; \quad г) \frac{\frac{g}{g-j} + \frac{h}{h-g} + \frac{j}{j-h}}{\frac{g}{g-j} + \frac{h}{h-g} + \frac{j}{j-h}}.$$

1218. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} a) (m+2)(m+5) \geq 0; & д) (c+1)(1-c) \geq c+1; \\ б) z(-2-z) \geq 0; & е) (b-3)(5-b) \leq 4b-12; \\ в) (x+1)(2-5x) \leq 0; & ж) (2n+5)(5n+2)(n^2-1) \leq 0; \\ г) (3-2a)(-1+a) \leq 0; & з) (k-5)(3-5k)(k^2-2)^2 \geq 0. \end{array}$$

1219. Решите уравнение:

$$a) \sqrt{f^2-4f+3} + \sqrt{-f^2+3f-2} = \sqrt{f^2-f};$$

$$б) \sqrt{g+3} + \sqrt{g+4} = \sqrt{g+2} + \sqrt{g+7};$$

$$в) \sqrt{j^2-2j+1} + \sqrt{j^2+2j+1} = 2;$$

$$г) \sqrt{k^2+2k+1} - \sqrt{k^2-4k+4} = 3.$$

1220. Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} (s-2)(d-3) = 1, \\ \frac{s-2}{d-3} = 1; \end{cases} \quad в) \begin{cases} \frac{3h-2}{j+5} + \frac{j}{h} = 2, \\ h-j = 4; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{f+3}{(3g-f)(3f-g)} = \frac{1}{2}, \\ \frac{g-f}{g+f} = \frac{2}{5}; \end{cases} \quad г) \begin{cases} \frac{2k-5}{k-2} + \frac{2l-3}{l-1} = 2, \\ 3k-4l = 1. \end{cases}$$

1221. Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} (x+2)(y-1) = -2, \\ \frac{x+2}{y-1} = -2, \end{cases} \quad в) \begin{cases} c+m = 3, \\ \frac{2c-m}{m+2} - \frac{m}{c} = 3; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{m+2n}{m-n} = \frac{1}{4}, \\ \frac{(2m-n)(2n+m)}{m+n+1} = \frac{7}{3}; \end{cases} \quad г) \begin{cases} 3z-2a = 1, \\ \frac{3z-5}{a+1} + \frac{5a-1}{z+1} = 1. \end{cases}$$

1222. Решите систему уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{5}{4}; \end{cases} \quad в) \begin{cases} s^2 + d^2 = f^2, \\ \frac{s}{d} = \frac{g}{h}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{1}{l} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}, \\ l^2 + k^2 = 160; \end{cases} \quad г) \begin{cases} \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2}{n^2}, \\ b-z = n-c. \end{cases}$$

1223. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{2q+1} < 5; & г) \sqrt{\frac{2t-1}{3t-2}} \leq 3; \\ б) \sqrt{3e-2} > 1; & д) \sqrt{2y+10} < 3y-5; \\ в) \sqrt{\frac{r+3}{4-r}} \geq 2; & е) \sqrt{(p-3)(p+1)} > 3(p+1). \end{array}$$

1224. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{3z^2-22z} > 2z-7; & в) \sqrt{2b^2+7b+50} \geq b-3; \\ б) \sqrt{c^2-5c+6} \leq c+4; & г) n^2 + \sqrt{n^2+11} < 31. \end{array}$$

1225. Докажите тождество

$$(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots-x^2y^{n-3}+xy^{n-2}-y^{n-1})=x^n+y^n$$

и, используя его, запишите многочленом выражение:

$$\begin{array}{ll} a) (a+1)(a^5-a^4+a^3-a^2+a-1); \\ б) (b+2)(b^3-2b^2+4b-8); \\ в) (c+3)(c^4-3c^3+9c^2-27c+81). \end{array}$$

1226. Докажите, что биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

1227. Точка гипотенузы прямоугольного треугольника, равноудаленная от катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40. Найдите длины катетов.

1228. Когда в ромб с острым углом 45° вписали окружность, то ее радиус оказался равным 2. Найдите произведение диагоналей ромба.

1229. В ромб с высотой h и острым углом α вписана окружность. Найдите радиус большей из двух возможных окружностей, каждая из которых касается данной окружности и двух сторон ромба.

1230. Сторона PS прямоугольника $PQRS$ в три раза больше стороны PQ , а точки A и B делят сторону PS на три доли. Найдите сумму углов PAQ , PBQ и PSQ .

1231. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b проведена биссектриса прямого угла. Найдите расстояние между ортоцентрами двух образовавшихся треугольников.

1232. В остроугольный треугольник с площадью 3 вписан такой квадрат, что одна его сторона лежит на стороне треугольника длиной 3, а противоположная соединяет точки на двух других сторонах. Найдите площадь квадрата.

1233. Найдите площадь треугольника DEF , в котором сторона DE равна 20, а медианы, проведенные к сторонам EF и DF , равны 18 и 24.

1234. Торонто, Монреаль, Калгари, Эдмонтон, Виннипег — наибольшие города Канады (рис. 398). Уменьшенное на 11 тыс. чел. население Торонто относится к увеличенному на 10 тыс. чел. населению Эдмонта как 40 : 11, а к увеличенному на 1 тыс. чел. населению Монреаля — как 32 : 13.



Рис. 398

Уменьшенное на 1 тыс. чел. население Калгари относится к увеличенному на 1 тыс. чел. населению Монреаля как 54 : 65, а к увеличенному на 1 тыс. чел. населению Виннипега — как 72 : 53. Найдите население этих городов Канады, учитывая, что население Торонто на 31 тыс. чел. больше учетверенного населения Виннипега.

* * *

1235. Есть 30 таких чисел $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{30}$, что $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{30}$. Найдите такую последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{30}$ их расположения, чтобы сумма $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{29} - a_{30}| + |a_{30} - a_1|$ была наибольшей.

1236. На стороне BC треугольника ABC выбрали точку K так, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N , для которой $AN = BC$. Докажите, что $BK = KN$.

1237. В окружность вписан неправильный n -угольник, который при повороте вокруг центра на угол, отличный от 360° , совмещается сам с собой. Докажите, что число n составное.

28*. Логические основы геометрии

Геометрия — часть математики, которая изучает пространственные формы и отношения.

Первичные геометрические представления появились на самых ранних этапах развития общества и постепенно расширялись и уточнялись в связи с усложнением практической деятельности, в процессе которой людям приходилось оценивать расстояния, стрелы и копья делать прямыми, сравнивать их по длине и др. Но сама геометрия зародилась тогда, когда развитие земледелия заставило людей выработать первые правила: измерения земельных участков; нахождения объемов емкостей; возведения строений и др. Эти правила сравнения фигур, нахождения геометрических величин, простейших геометрических построений составили начала геометрии как прикладной науки. Такая практическая геометрия складывалась в древних земледельческих обществах в Египте, Вавилоне, дельте Инда, Китае. Самый ранний документ, содержащий геометрические сведения, дошел до нас из Египта и относится к XVII ст. до н. э. Этот и более поздние документы свидетельствуют о том, что египтяне знали много геометрии.



Рис. 399

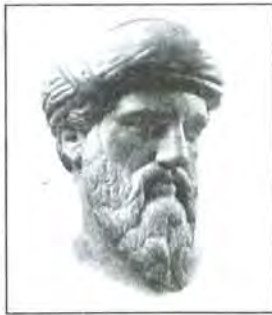


Рис. 400

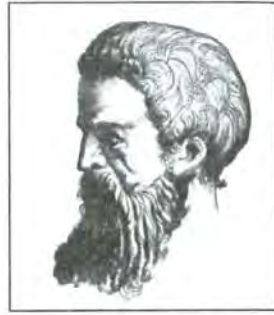


Рис. 401

ческих фактов, например теорему Пифагора, приближенное представление объема шара через его радиус, но это были именно факты. Математика в нашем нынешнем понимании оформилась значительно позже.

В VII ст. до н.э. геометрические знания египтян были усвоены учеными Древней Греции, где на протяжении нескольких столетий пополнились многими новыми фактами. Эти факты постепенно упорядочивались, складывались в систему, одни факты стали выводиться из других. Формировалась процедура доказывания, и этим самым факты превращались в теоремы, т. е. предложения, которые устанавливаются рассуждениями без ссылок на опыт. Стали появляться задачи, имеющие чисто теоретическое значение, например задача построения геометрической линейкой и циркулем квадрата, равновеликого данному кругу, оформляться представления об идеальных геометрических фигурах — точки без измерений, линии без ширины и толщины, поверхности без толщины и т. п. Геометрия постепенно становится наукой в нынешнем понимании этого слова. Восстановить процесс становления геометрической науки в деталях невозможно, но известны многие древние ученые, которые его определяли, среди них Фалес (624—547 до н. э.) (рис. 399) и Пифагор (580—500 до н. э.) (рис. 400). В конце V ст. до н. э. греческий геометр Гиппократ Хиосский создал первое систематическое произведение по геометрии, которое, однако, до нас не дошло.

Одним из важнейших событий того времени было открытие несоизмеримых отрезков: диагональ квадрата и его сторона не имеют общей меры, т. е. ни один отрезок, каким бы малым он ни был, не укладывается целое количество раз как

на стороне, так и на диагонали. Прежнее представление о том, что отношение любых величин можно выразить рациональным числом, т. е. отношением натуральных чисел, оказалось неправильным. Обобщить понятие числа введением класса иррациональных чисел греки не смогли. Поэтому то, что мы теперь выражаем средствами алгебры, греки выражали геометрически. Например, квадратное уравнение $x^2 + ax = b$ представлялось так: найти такой отрезок x , чтобы построенный на нем квадрат вместе с прямоугольником, построенным на этом отрезке и данном отрезке a , имели площадь, равную данной площади b . Вместо действительных чисел рассматривались отношения величин, теорию которых в IV ст. до н. э. построил Евдокс (около 408 — около 355 до н. э.) (рис. 401).

Достижения геометрической науки были систематизированы Евклидом в работе, известной под названием *Начала*. Здесь геометрия представлена так, как понимается и теперь *элементарная геометрия*: наука о пространственных формах и отношениях, развертывающаяся в логической последовательности на основании явно сформулированных основных положений — *аксиом*. Теперь эту науку называют *евклидовой геометрией*. Геометрия после Евклида еще в Древней Греции исследованиями Архимеда (около 287—212 до н. э.), Аполлония Пергского (около 260—170 до н. э.), Гиппарха (около 180—125 до н. э.), Менелая (I ст.) обогащается новыми фактами. Дальнейшее развитие геометрии замедлилось без новых идей и методов. Они появились только в III ст. в работах Диофанта, математиков Индии, Средней Азии, странах арабского Востока. Из Индии пришли три больших достижения: позиционная десятичная система счисления, понятие отрицательного числа, понятие иррационального числа. Западная Европа снова становится центром математического развития только в XVI ст., а в геометрии принципиально новые шаги были сделаны только в XVII ст., когда французский философ и математик Р. Декарт (1596—1650) вводит в геометрию метод координат, который позволил связать геометрию с алгеброй. В результате развилась *аналитическая геометрия*, в которой геометрические фигуры задаются уравнениями. Это позволяет методы геометрии перенести в алгебру, а в алгебре пользоваться наглядными геометрическими образами.



Рис. 402

Исследования, связанные с устранением логических недостатков системы аксиом, предложенной Евклидом, завершились к концу XIX ст., когда немецким математиком Д. Гильбертом (1862—1943) (рис. 402) была предложена первая полная аксиоматика евклидовой геометрии.

Важной особенностью аксиоматики Гильберта является то, что она представлена в форме, в которой наглядные представления оставлены в стороне как несущественные для построения теории.

Точки и прямые в этом построении — это любые объекты, а отношения между ними, обозначенные словами *принадлежит, лежит между, конгруэнтно*, — любые отношения, о которых известно только то, что они удовлетворяют указанным аксиомам. Неопределяемыми явно понятиями являются понятия: *точка; прямая; плоскость; отношение принадлежности; отношение лежать между; отношение конгруэнтности (равенства)*. Они описываются аксиомами, разделенными на 5 групп.

Аксиомы первой группы отношением *лежит на (проходит через)* связывают точку и прямую:

1.1. Есть только одна прямая, которой принадлежат две данные точки.

1.2. На каждой прямой есть хотя бы две точки и есть хотя бы три точки, которые не лежат на одной прямой.

Аксиомы второй группы описывают отношение *лежать между*, которое связывает три точки прямой. С использованием этого отношения определяются понятия отрезка, луча, угла, треугольника.

2.1. Если точка X лежит между точками A и B , то A , X , B — различные точки одной прямой и точка X лежит между точками B и A .

2.2. Если есть две точки A и B , то на прямой AB есть хотя бы одна такая точка C , что B лежит между точками A и C .

2.3. Из трех точек прямой не более одной лежит между двумя другими.

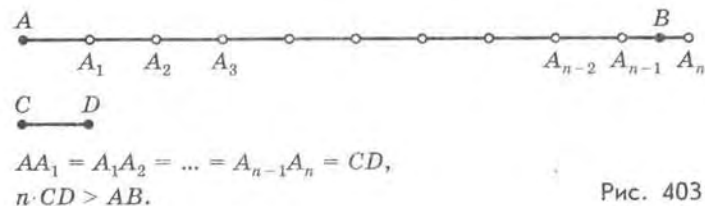


Рис. 403

2.4. Если прямая не проходит ни через одну вершину треугольника и пересекает одну из его сторон во внутренней точке, то она пересекает еще одну из двух других сторон.

Третья группа аксиом описывает отношение равенства для отрезков и углов:

3.1. Каждый отрезок можно единственным способом отложить на любом луче от его начала.

3.2. Если первый отрезок равен второму, а второй — третьему, то и первый отрезок равен третьему.

3.3. Суммы равных отрезков равны друг другу.

3.4. Каждый угол, меньший развернутого, можно единственным способом отложить от данного луча в данную сторону.

3.5. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Четвертая группа аксиом описывает свойство непрерывности прямой, которое соответствует нашему интуитивному представлению о том, что на прямой нет просветов, дырок.

4.1. Для любых двух отрезков AB и CD на прямой AB от точки A можно последовательно отложить отрезок CD столько раз, что получится отрезок AA_n , больший отрезка AB (рис. 403).

4.2. Любая система вложенных отрезков $[A_n; B_n]$ (рис. 404), длины которых стремятся к нулю, когда n неограниченно увеличивается, имеет точку, принадлежащую всем этим отрезкам.

Пятая группа аксиом состоит из одной аксиомы, которая описывает отношение параллельности:

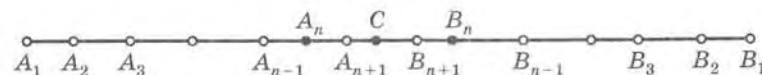


Рис. 404

5.1. Через данную точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной прямой.

Позже, в XX ст., для евклидовой геометрии появились и другие системы аксиом: немецкий математик Ф. Шур (1856—1932) предложил аксиоматику, основанную на понятии движения, русский математик В. Ф. Каган (1869—1953) опубликовал аксиоматику, в основу которой положено понятие расстояния, немецкий математик Г. Вейль (1895—1955) предложил векторную аксиоматику. Эти системы аксиом равносильны в том смысле, что, приняв одну из них, можно так определить все понятия, используемые в других, что эти понятия будут иметь все свойства, сформулированные в других системах в качестве аксиом.

Отметим, что при построении курса геометрии могут использоваться различные варианты одной и той же аксиоматики. Например, вместо аксиомы параллельных можно принять в качестве аксиомы утверждение о сумме углов треугольника, так как, как было доказано в параграфе 25 учебного пособия для 8-го класса, эти утверждения равносильны, т. е. истинность одного из них влечет за собой истинность другого, понятно, при истинности остальных аксиом. Эти различные варианты аксиоматики дают одинаковые теории, т. е. с их помощью можно доказать одни и те же теоремы.

- ?
1. Назовите основные понятия аксиоматической теории евклидовой геометрии.
 2. Приведите примеры аксиом, описывающих отношение принадлежности.
 3. Приведите примеры аксиом, описывающих отношение *лежать между*.
 4. Приведите примеры аксиом, описывающих отношение равенства.
 5. Сформулируйте аксиому параллельности.

1238. Докажите, что если в треугольнике ABC можно выбрать такую точку M , что $AM = AB$, то $AB < AC$.

1239. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC равна стороне AD . Докажите, что сторона BC меньше диагонали BD .

1240. Докажите, что два треугольника равны, если они имеют пары равных углов при одной стороне и равные высоты, проведенные к этим сторонам.

1241. Докажите, что биссектриса внешнего угла параллелограмма вместе с продолжениями его сторон, не проходящих через эту вершину, образуют равнобедренный треугольник.

1242. Докажите, что если вершины одного параллелограмма находятся по одной на сторонах другого параллелограмма, то эти параллелограммы имеют общий центр.

1243. Докажите, что биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, пересекаются на средней линии под прямым углом.

1244. Докажите, что сумма диаметров окружностей, описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в него, равна сумме катетов.

1245. Докажите, что окружность, которая проходит через ортоцентр треугольника и две его вершины, равна окружности, описанной около этого треугольника.

1246. Докажите, что высоты треугольника являются биссектрисами углов треугольника, который определяется основаниями этих высот.

1247. В трапеции $UVXY$ с боковыми сторонами UV и XY , равными 2 и 5 соответственно, проведена диагональ UX . Найдите отношение $UY : VX$ оснований трапеции.

1248. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены хорды AC и AD , которые касаются данных окружностей. Докажите, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

1249. Через точку A вне окружности проведены прямые, касающиеся окружности в точках B и C . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

1250. Около правильного треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M . Докажите, что $AM = BM + CM$.

1251. Запишите многочлен стандартного вида выражение:

- а) $(n + m)^3 - (n - m)^3$;
- б) $(q^4 - q^2c^2 + c^4)(q^2 + c^2)$;
- в) $(2a^3 - a^2 + 4a - 3)(a^2 - a + 5)$;
- г) $(3l - 5k + 8j)(2l - 3k) + (2l - 5k + 6j)(3k - 2l)$;
- д) $(2h - 3g + 4f)(5h + 4g) - (3h - 2g)(3g - 2h - 4f)$;
- е) $(s^3 - 3s^2d + 3sd^2 - d^3)(s^2 - 2sd + d^2)$.

1252. Разложите на множители выражение:

- а) $qh - q + h - 1$;
 б) $18cs - 24zs - 9c + 12z$;
 в) $3er - 4sd - 4ed + 3sr$;
 г) $30z^2 - 18zp - 35zq + 21qp$;
 д) $10m^2 + 21gy - 14mg - 15my$;
 е) $8j^2h - 8j^2f + 6f^2h - 6f^3$;
 ж) $b^2m^3 - bmn^2y + n^3y^2 - bm^2ny$;
 з) $lk^2 - sk^2 + sk - lk + l - s$.

1253. Упростите выражение:

- а) $\frac{q^2 - l^2}{q^2 - q - l - l^2}$; ж) $\frac{j^2 + 5j + 6}{j^2 + 4j + 4}$;
 б) $\frac{5e^3 + e^2r + 5er^2 + r^3}{5er + r^2}$; з) $\frac{h^2 + 3h + 2}{h^2 + 6h + 5}$;
 в) $\frac{t^3 + 1}{6t^2 + 12t + 6}$; и) $\frac{g^2 - 7g + 12}{g^2 - 6g + 9}$;
 г) $\frac{(y + e)^3}{2y^2e + ye^2 + y^3}$; к) $\frac{f^2 + 2f + 1}{f^2 + 8f + 7}$;
 д) $\frac{3n^2p - np^2}{3n^3 - 3np^2 - n^2p + p^3}$; л) $\frac{2ds - d^2 - s^2 + z^2}{d^2 + z^2 - s^2 + 2dz}$;
 е) $\frac{l^2k + lk^2}{l^3 + k^3 + 3lk(l + k)}$; м) $\frac{c^3 - c^2a + ca^2}{a^3 + c^3}$.

1254. Сократите дробь:

- а) $\frac{1 - b^2}{b^3 + 2b^2 + b}$; д) $\frac{e^3r + 2e^2r^2 + er^3}{r^2 - e^2}$;
 б) $\frac{n^2 + nm + m^2}{n^6 - n^3m^3}$; е) $\frac{2t + y}{3y^2 - 12t^2}$;
 в) $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^3 - 9a}$; ж) $\frac{d^3 + p^3}{d^3 + 2d^2p + dp^2}$;
 г) $\frac{qs^2 - 16q^3}{(14q + s)^2}$; з) $\frac{k^2 + 2kl + l^2}{2k^3l + 2l^4}$.

1255. Упростите выражение:

- а) $\frac{8}{2q - 3} + \frac{5}{3 - 2q} - \frac{3q - 4}{2q^2 - q - 3}$;
 б) $\frac{h}{j} - \frac{(h^2 - j^2)g}{j^2} + \frac{h(h^2 - j^2)g^2}{j^2(j + hg)}$;
 в) $\frac{e + r}{r} - \frac{2e}{e + r} + \frac{e^3 - e^2r}{r^3 - re^2}$;
 г) $\frac{t - a}{ta} - \frac{t}{a^2 + at} + \frac{a}{ta + t^2}$;
 д) $\frac{1}{(s - d)(f + d)} + \frac{1}{(d - s)(f + s)}$;
 е) $\frac{g}{(g - h)(g - j)} + \frac{h}{(h - g)(h - j)} + \frac{j}{(j - g)(j - h)}$.

1256. Упростите выражение:

- а) $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{b^{-1} - c(ab)^{-1}}$;
 б) $\frac{(xy^{-1} + x^{-1}y + 1)(x^{-1} - y^{-1})^2}{x^2y^{-2} + x^{-2}y^2 - (xy^{-1} + x^{-1}y)}$;
 в) $\frac{(1 + ab^{-1})^{-1} + a}{((1 - a^{-1}b)^{-1} - b)^{-1}} - \frac{(a^{-1}b + 1)^{-1} + b}{((ab^{-1} - 1)^{-1} - a)^{-1}}$;
 г) $\frac{1 - (a + (a - 1)^{-1})^{-2}}{(1 - (a + (a - 1)^{-1})^{-1})^2}$.

1257. Упростите выражение:

- а) $\left(f^{\frac{3}{2}} + g^{\frac{3}{2}}\right) : \left(f^{\frac{1}{2}} + g^{\frac{1}{2}}\right)$;
 б) $(l^{1,5} - k^{1,5}) : (l + l^{0,5}k^{0,5} + k)$;
 в) $\left(10b - 15b^{\frac{2}{3}} - 32b^{\frac{1}{3}} + 18 + 24b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(5b^{\frac{2}{3}} - 6\right)$;
 г) $\left(y^{\frac{5}{6}} + 2y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{1}{6}} - 4y^{-\frac{1}{6}} - 3y^{-\frac{1}{2}} - 6y^{-\frac{5}{6}}\right) : \left(y - 2y^{\frac{1}{3}} - 3y^{-\frac{1}{3}}\right)$.

1258. Решите уравнение:

- а) $\sqrt{1 + \frac{9}{x}} + 4\sqrt{\frac{x}{x + 9}} = 4$; в) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x - 1}{x}$;
 б) $\sqrt{1 + y} - \frac{1}{\sqrt{1 + y}} = \sqrt{2 + y}$; г) $\sqrt[3]{z + 45} - \sqrt[3]{z - 16} = 1$.

1259. Решите уравнение:

- а) $\sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{x^2-2x+1} = 4$;
 б) $\sqrt{y+2} + 5\sqrt[4]{y+2} = 6$;
 в) $z^2 + \sqrt{z^2+4} = 2$;
 г) $2k^2 + 2k + 3\sqrt{k^2+k-1} = 7$.

1260. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} (h+j)(8-h) = 10, \\ (h+j)(5-j) = 20; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 2k^2 - 3kl + 5l - 5 = 0, \\ (k-2)(l-1) = 0; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} z^2 - 5c^2 - 3z - c + 22 = 0, \\ (z-3)(c-2) = c^2 - 3c + 2; \end{cases}$
 г) $\begin{cases} (b+n)^2 - 4(b+n) = 45, \\ (b-n)^2 - 2(b-n) = 3. \end{cases}$

1261. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} q^2 + qe = r, \\ e^2 + qe = t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{d-f}{d} + \frac{g-h}{h} = 1, \\ \frac{d-f}{f} + \frac{g-h}{g} = \frac{1}{2}; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} \frac{3y}{p-s} = \frac{p}{y}, \\ \frac{10y}{p+s} = \frac{s}{y}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{j+k}{k} - \frac{l+k}{l} = 3, \\ \frac{l+k}{k} - \frac{j+k}{j} = \frac{3}{4}. \end{cases}$

1262. Постройте график функции $U = -y^2 - 4y + 5$ и, используя его, решите неравенство:

- а) $-y^2 - 4y + 5 < 0$; в) $-y^2 - 4y + 5 > 0$;
 б) $-y^2 - 4y + 5 \leq 0$; г) $-y^2 - 4y + 5 \geq 0$.

1263. Решите неравенство:

- а) $(a-5)^2(a^2-81) < 0$; е) $(f-3)(f^2-121) \geq 0$;
 б) $(b+6)^3(b^2-100) \leq 0$; ж) $(g^3-1)(g^2-4) > 0$;
 в) $(c+8)^3(c^2-169) \geq 0$; з) $(h^3+64)(h^2-9) \leq 0$;
 г) $(d^2-1)(d+3) \geq 0$; и) $(i^3+125)(i+6) > 0$.
 д) $(e^2-49)(e-5) < 0$;

1264. Решите неравенство:

- а) $\frac{p+2}{2p-3} > 1$; г) $\frac{t^2-5t+6}{t^2+5t+6} < 0$; ж) $3 - \frac{2h-17}{h-5} > \frac{h-5}{h+2}$;
 б) $\frac{5q-3}{4-q} < 2$; д) $2 - \frac{w-3}{w-2} > \frac{w-2}{w-1}$; з) $\frac{1}{w+1} + \frac{2}{w+3} < \frac{3}{w+2}$;
 в) $\frac{10-s}{5+s^2} > \frac{1}{2}$; е) $\frac{v+1}{v-1} + 2 > \frac{v-1}{v}$; и) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} - \frac{6}{x-1} < 0$.

1265. Решите неравенство:

- а) $\sqrt{3x^2-13x} > 2x+6$; в) $t^2 + \sqrt{t^2+7} < 13$;
 б) $\sqrt{y^2-4y+3} \leq y-3$; г) $\sqrt{2s^2-5s+13} \geq s+1$.

1266. Есть ромб со стороной a и углом α . Найдите радиус окружности, которая проходит через две его смежные вершины и касается прямой, проходящей через две другие вершины.

1267. Окружности с радиусами 8 и 18 касаются внешним образом и имеют общую касательную. Третья окружность касается этих окружностей и их касательной. Найдите ее радиус.

1268. В равнобедренную трапецию вписана окружность с радиусом 18. Точкой касания боковая сторона делится на части, разность которых равна 15. Найдите площадь трапеции.

1269. На плоскости отмечены такие точки E, G, I и K , что $\angle EGK = 34^\circ$, $\angle EKI = 84^\circ$, $\angle IGK = 62^\circ$. Найдите величину угла IEK .

1270. На окружности с радиусом r выбраны три точки, которые разделяют окружность на три дуги в отношении 3:4:5. Найдите площадь треугольника, образованного касательными к окружности, проведенными через точки деления.

1271. Около окружности описана равнобедренная трапеция с боковой стороной b , одно основание которой равно a . Найдите площадь трапеции.

1272. Трапеция разделена на три части двумя прямыми, параллельными основаниям трапеции и делящими каждую из боковых сторон на три доли. Найдите площадь средней части, учитывая, что площади крайних равны P и Q .

1273. Стороны AB и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны k и l , причем $k \neq l$. Определите, что пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD .

1274. Найдите длину отрезка, который параллелен основаниям трапеции, соединяет точки на боковых сторонах и проходит через точку пересечения диагоналей, учитывая, что основания трапеции равны a и b .

1275. Отношение оснований равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равно k . Найдите угол при основании трапеции.

1276. Основания MN и OP трапеции $MNOP$ соответственно равны a и b . Найдите площадь трапеции, учитывая, что диагонали трапеции являются биссектрисами углов PMN и MNO .

1277. Средняя линия равнобедренной трапеции равна a , а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите ее площадь.

1278. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S , а ее высота в два раза меньше боковой стороны. Найдите радиус вписанного в трапецию круга.

1279. Площади треугольников, ограниченных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

1280. Туристы сначала ехали 1,5 ч на машине, а затем 3 ч поездом. Найдите путь, который преодолели туристы, учитывая, что скорость поезда была в 1,5 раза меньше скорости машины, а средняя скорость на всем пути оказалась равной 70 км/ч.

1281. Есть два цилиндра с высотами 10 см и 15 см, площади оснований которых относятся как 3:4. Найдите их объемы, учитывая, что площадь основания третьего цилиндра, объем которого равен общему объему первого и второго цилиндров, а высота — сумме их высот, равна 72 см².

* * *

1282. Докажите, что для любого целого числа m найдутся такие целые числа n и k , что $m = \frac{n - 2k + 1}{k^2 - n}$.

1283. Есть три последовательности из натуральных чисел:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots; \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots; \\ c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots \end{aligned}$$

Докажите, что найдутся такие номера k и m , что $a_k \leq a_m$, $b_k \leq b_m$, $c_k \leq c_m$.

1284. Точки K и N выбраны на окружностях, которые пересекаются в точках A и B так, что прямые AK и AN являются касательными к этим окружностям в точке A , а точка M симметрична точке A относительно точки B . Докажите, что через точки A , K , M и N можно провести окружность.

29*. Геометрия Лобачевского

В исследовании системы аксиом, предложенной Евклидом, большое значение имели исследования, связанные с так называемым *пятым постулатом Евклида*, который имеет такую формулировку: *требуется, чтобы каждый раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых углов, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых*. Указанный постулат (требование) имеет более сложную структуру по сравнению с другими евклидовскими аксиомами и постулатами, имеет форму теоремы. Поэтому на протяжении двух тысяч лет предпринимались попытки доказать это утверждение на основании остальных аксиом. Многим из их математиков и обывателей казалось, что они достигли цели, но затем выяснялось, что при доказательстве они заменяли пятый постулат Евклида другим равносильным ему утверждением. Среди таких равносильных пятому постулату утверждений находятся и хорошо известные вам утверждения:

через каждую точку вне данной прямой проходит не более одной прямой, не пересекающей данной прямой (Плейфер (1748—1819));

сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам (Насирэддин (1201—1274), Саккери (1667—1733), Лежандр (1646—1716));

через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность (Ф. Бойаи (1775—1856)).

Делались попытки доказать аксиому параллельных Плейфера методом от противного, т. е. прийти к противоречию, приняв отрицание этой аксиомы: *через данную точку вне данной прямой проходит по крайней мере две прямые, не пересекающие данной прямой*. Но противоречия не получалось.



Рис. 405



Рис. 406



Рис. 407

И тогда в начале XIX ст. примерно в одно время у разных математиков возникла мысль о том, что противоречия не будет, что может быть геометрия, в которой истинно отрицание аксиомы параллельных Плейфера.

Первым об этом в 1826 г. публично заявил русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856) (рис. 405), который в 1829—1830 гг. в книге *О началах геометрии* изложил основания новой *неевклидовой геометрии*. В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Я. Бойаи (1802—1860) (рис. 406) с теми же результатами. К открытию неевклидовой геометрии пришел и немецкий математик К. Гаусс (1777—1855) (см. рис. 296), но при жизни он не публиковал своих результатов, так как боялся быть непонятым современниками. Названием *геометрия Лобачевского* подчеркивается всеобщее признание вклада Н. И. Лобачевского в развитие неевклидовой геометрии.

Геометрия Лобачевского отличается от евклидовой геометрии только одной аксиомой Лобачевского: *через точку вне данной прямой проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую*. Поэтому в геометриях Евклида и Лобачевского есть общая часть, именно те утверждения, которые можно доказать без использования аксиомы параллельных. Совокупность таких утверждений составляет так называемую *абсолютную геометрию*. Французский математик А. Лежандр (1752—1833) (рис. 407) установил, что в абсолютной геометрии истинно утверждение:

Сумма внутренних углов треугольника меньше или равна 180° , причем если эта сумма равна 180° в одном треугольнике, то она равна 180° в каждом треугольнике.

Опираясь на это, установим некоторые факты геометрии Лобачевского.

Теорема 1. *Сумма внутренних углов треугольника меньше 180° .*

Доказательство. В соответствии с теоремой Лежандра сумма внутренних углов треугольника меньше или равна 180° . Допустим, что эта сумма равна 180° . Тогда в соответствии с теоремой 4 из параграфа 25 учебного пособия для 8-го класса через данную точку вне данной прямой проходит одна прямая, параллельная данной прямой. Но это противоречит аксиоме Лобачевского. Значит, сумма углов треугольника не может быть равной 180° . Остается признать, что сумма углов треугольника меньше 180° .

Теорема 2. *Сумма внутренних углов четырехугольника меньше 360° .*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник (рис. 408). Диагональ BD разделяет его на два треугольника ABD и CBD . По теореме 1 для суммы углов этих треугольников получим:

$$\angle A + \angle ABD + \angle BDA < 180^\circ; \quad \angle C + \angle CBD + \angle BDC < 180^\circ.$$

Сложим эти неравенства покомпонентно:

$$\angle A + (\angle ABD + \angle CBD) + \angle C + (\angle BDA + \angle BDC) < 180^\circ + 180^\circ.$$

Теперь учтем, что

$$\angle ABD + \angle CBD = \angle B, \text{ а } \angle BDA + \angle BDC = \angle D;$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D < 360^\circ.$$

Теорема 3. *Сумма углов треугольника непостоянна.*

Доказательство. Допустим, что сумма углов любого треугольника есть некоторая постоянная величина γ , меньшая 180° . Пусть MNP — произвольный треугольник. Через одну из вершин, например N , проведем прямую, пересекающую

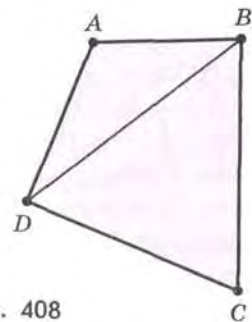


Рис. 408

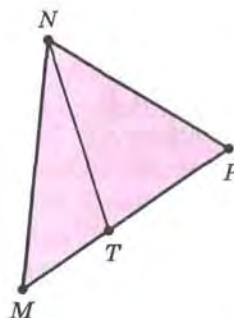


Рис. 409

противолежающую сторону в некоторой точке T (рис. 409). Тогда треугольник MNP разобьется на два треугольника MNT и PNT . Запишем сумму сумм углов этих треугольников и затем преобразуем ее:

$$\begin{aligned} & (\angle M + \angle MNT + \angle MTN) + (\angle P + \angle PNT + \angle PTN) \stackrel{(1)}{=} \\ & = \angle M + (\angle MNT + \angle PNT) + \angle P + (\angle MTN + \angle PTN) \stackrel{(2)}{=} \\ & = (\angle M + \angle MNP + \angle P) + 180^\circ. \end{aligned}$$

Здесь мы учли: (1) — свойство сложения; (2) — то, что углы MTN и PTN вместе образуют развернутый угол.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & (\angle M + \angle MNT + \angle MTN) + (\angle P + \angle PNT + \angle PTN) = \\ & = (\angle M + \angle MNP + \angle P) + 180^\circ. \end{aligned}$$

Теперь учтем, что в скобках записаны суммы углов треугольников MNT , PNT и MNP соответственно, и то, что все они по допущению равны γ :

$$\gamma + \gamma = \gamma + 180^\circ.$$

Отсюда

$$\gamma = 180^\circ,$$

что противоречит теореме 1.

Три известные вам признака равенства треугольников принадлежат абсолютной геометрии, поэтому они истинны и в геометрии Лобачевского. В этой геометрии есть такой признак равенства треугольников, которого нет в евклидовой геометрии, именно признак по равенству трех углов.

Теорема 4. Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ истинны равенства

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

и вместе с этим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не равны, т. е. не равны какие-либо их соответствующие стороны, например AB и A_1B_1 . Пусть для определенности $AB > A_1B_1$. Тогда на стороне AB найдется такая точка B_2 , что $AB_2 = A_1B_1$, а на луче AC такая точка C_2 , что $AC_2 = A_1C_1$ (рис. 410).

Прямые BC и B_2C_2 не могут пересекаться. Действительно, углы AB_2C_2 и BB_2C_2 смежные. А поскольку угол AB_2C_2 равен CBV_2 , то углы CBV_2 и BB_2C_2 вместе составляют 180° . Если допустить, что BC и B_2C_2 пересекаются, то точка их пересечения

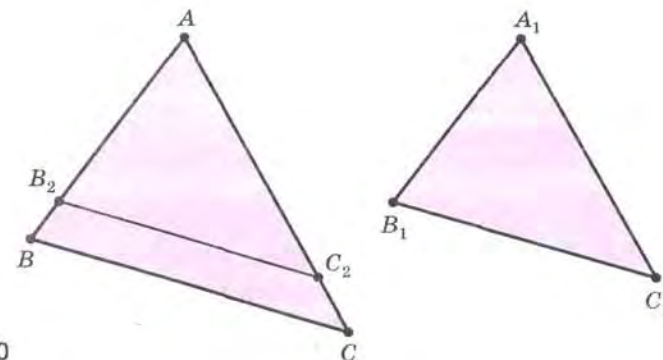


Рис. 410

вместе с точками B и B_2 будут вершинами треугольника, сумма углов которого не меньше 180° . А это противоречит теореме 1. Значит, точка C_2 лежит на стороне AC , а треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по углу и прилежащих сторонах.

Мы доказали, что углы CBV_2 и BB_2C_2 вместе составляют 180° . Так же углы BCC_2 и CC_2B_2 вместе составляют 180° . Значит, сумма углов четырехугольника BB_2C_2C равна 360° , а это противоречит теореме 2.

Полученное противоречие явилось следствием допущения о том, что $AB > A_1B_1$. Такое же противоречие получится, если допустить, что $AB < A_1B_1$. Поэтому нужно признать, что $AB = A_1B_1$. Теперь, учитывая условия о том, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, утверждаем равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим углам.

Следствие. В геометрии Лобачевского нет неравных подобных треугольников.

Необычность теорем геометрии Лобачевского, их расхождение с привычными для нас пространственными представлениями не должно вызывать чувства недоверия к ним. Сам Лобачевский в связи с этим отмечал, что «на первый взгляд может показаться, что теоремы геометрии, названные мной воображаемой геометрией, вообще противоречивы, однако отмечу, что хотя они и противоречат нашему воображению и привычке, но, однако, полностью безупречны со стороны логической».



1. Сформулируйте пятый постулат Евклида.
2. Сформулируйте аксиому параллельных Плейфера.
3. Сформулируйте аксиому параллельных Лобачевского.

4. Что называют абсолютной геометрией?
5. Сформулируйте теорему Лежандра о сумме внутренних углов треугольника.
6. Что можно утверждать о сумме внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского?
7. Сформулируйте признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

1285. Докажите, что сумма внутренних углов шестиугольника в геометрии Лобачевского меньше 540° .

1286. Методом математической индукции докажите, что в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов многоугольника меньше $180^\circ \cdot (n - 2)$.

1287. Докажите, что пятый постулат Евклида равносильно:

- а) аксиоме параллельных Плейфера;
- б) утверждению о равенстве соответствующих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой;
- в) утверждению о том, что сумма внутренних односторонних углов, возникающих при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна 180° ;
- г) утверждению о том, что если какая-либо прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую;
- д) теореме Пифагора.

1288. Докажите, что в геометрии Лобачевского перпендикуляр и наклонная к одной прямой не всегда пересекаются.

1289. Верно ли, что на плоскости Лобачевского около каждого треугольника можно описать окружность?

1290. Разложите на множители выражение:

- а) $r^5 - r^3 + r^2 - 1$;
- б) $p^6 - p^5 - p^2 + p$;
- в) $r^3 - r^2 - r^6 + r^5$;
- г) $j^2h^2 + g^2f^2 - g^2h^2 - j^2f^2 - 4jhgf$;
- д) $(h^2 + g^2 - f^2)^2 - 4h^2g^2$;
- е) $4a^2y^2 - (t^2 - a^2 - y^2)^2$;
- ж) $y^4 + 2cy^3 - c^4 - 2y^3c$;
- з) $2z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 2z$;
- и) $p^5 - p^4 - 2p^3 + 2p^2 + p - 1$.

1291. Докажите тождество:

- а) $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} - \frac{3}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;
- б) $\frac{x+3}{2x-1} - \frac{x^2-5}{4x^2-4x+1} - \frac{2x^3-x(1-5x)-1}{8x^3-12x^2+6x-1} = \frac{2x+1}{(2x-1)^2}$;
- в) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2+x-1}{x^3-x^2+x-1} + \frac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1} - \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{x}{x^2-1}$;
- г) $\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$.

1292. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{e+r}{e-r} + \frac{e-r}{e+r}\right) : \left(\frac{e+r}{e-r} - \frac{e-r}{e+r}\right)$;
- б) $\left(1 - \frac{1-p}{1+p}\right) : \left(1 + \frac{1-p}{1+p}\right)$;
- в) $\left(n^2 + \frac{1}{n^2} + 2\right) : \left(n + \frac{1}{n}\right)$;
- г) $(f^2 - g^2 - h^2 + 2gh) : \frac{f+g-h}{f-g+h}$;
- д) $\left(\frac{(j+y)^2 - 4y^2}{j^2 - y^2} - \frac{j-y}{j+y}\right) : \frac{2y}{j+y}$;
- е) $\left(\frac{z^2}{c} + \frac{c^2}{z}\right) : \left(\frac{z}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{1}{z}\right)$;
- ж) $\left(\frac{1}{1+t} - \frac{2t}{9-t^2}\right) \cdot (t^2 - 2t - 3)$;
- з) $\frac{b^4 - 2b^3 + b^2 - 1}{8b^3 + 1} : \frac{b^2 - b - 1}{4b^2 - 2b + 1}$.

1293. Упростите выражение:

- а) $\left(1 + \frac{4x^2 + y^2}{4x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{1}{2x-y} + \frac{3y}{y^2 - 4x^2} - \frac{2}{2x+y}\right)$;
- б) $\frac{x+y}{(y-z)(z-x)} + \frac{y+z}{(z-x)(x-y)} + \frac{z+x}{(x-y)(y-z)}$;
- в) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)}$;
- г) $\frac{1}{(s-d)(s-f)} + \frac{1}{(d-f)(d-s)} + \frac{1}{(f-s)(f-d)}$.

1294. Упростите выражение:

- а) $\frac{x^4 - 8xy^3}{x^2 + 2xy + 4y^2} : \left(1 - 2\frac{y}{x}\right) - x^2$;
 б) $\left(\frac{(n+2)^2 - n^2}{3n^2 - 3} - \frac{4}{n^2 - n}\right) : \frac{n-3}{n^2 - 2n + 1}$;
 в) $\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$;
 г) $\left(\frac{x-m}{1+xm} - \frac{x-n}{1+xn}\right) : \left(1 + \frac{(x-m)(x-n)}{(1+xm)(1+xn)}\right)$.

1295. Упростите выражение:

- а) $\frac{1}{z-c} + \frac{1}{z+c} + \frac{2z}{z^2+c^2} + \frac{4z^3}{z^4+c^4} + \frac{8z^7}{z^8+c^8}$;
 б) $\frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{(s+3)(s+4)}$;
 в) $\frac{q^4 - (q-1)^2}{(q^2+1)^2 - q^2} + \frac{q^2 - (q^2-1)^2}{q^2(q+1)^2 - 1} + \frac{q^2(q-1)^2 - 1}{q^4 - (q+1)^2}$;
 г) $\frac{d^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right) + f^2\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{d}\right) + g^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{f}\right)}{\frac{d}{fg}(g-f) + \frac{f}{dg}(d-g) + \frac{g}{df}(f-d)}$.

1296. Упростите выражение:

- а) $\left(q^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}\right)^2$; в) $\left(a^{-\frac{1}{4}} + 2a^{\frac{1}{4}}\right)^2$; д) $\left(c^{-\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}\right)^3$;
 б) $\left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right)^2$; г) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3$; е) $\left(m^{-\frac{1}{2}} - 2m^{-\frac{2}{3}}\right)^3$.

1297. Упростите выражение:

- а) $(d - 2 + d^{-1}) \cdot \left(d^{\frac{1}{2}} - d^{-\frac{1}{2}}\right)$;
 б) $\left(c^{-\frac{1}{5}} + c^{\frac{2}{5}}\right) \cdot \left(c^{-\frac{2}{5}} + c^{\frac{4}{5}}\right) \cdot \left(c^{\frac{2}{5}} - c^{-\frac{1}{5}}\right)$;
 в) $\left(s^{\frac{2}{3}} + s^{\frac{5}{6}} + s\right) \cdot \left(s^{\frac{1}{3}} - s^{\frac{1}{2}}\right)$;
 г) $\left(e^{-\frac{4}{3}} + e^{\frac{4}{3}} + 1\right) \cdot \left(e^{\frac{2}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}\right)$;
 д) $\left(l^{\frac{2}{3}} + 1\right) \cdot \left(l^{\frac{4}{9}} + l^{\frac{2}{9}} + 1\right) \cdot \left(l^{\frac{2}{9}} - 1\right)$;
 е) $\left(j^{\frac{1}{6}} + h^{\frac{1}{6}}\right) \cdot \left(j^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(j^{\frac{1}{3}} - j^{\frac{1}{6}}h^{\frac{1}{6}} + h^{\frac{1}{3}}\right)$.

1298. Упростите выражение:

- а) $\frac{m-n}{m^{0,5} + n^{0,5}} - \frac{m^{1,5} + n^{1,5}}{m-n}$;
 б) $\frac{x-y}{x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} : \frac{x^{\frac{-1}{2}} - y^{\frac{-1}{2}}}{x^{\frac{-1}{2}} + y^{\frac{-1}{2}}}$;
 в) $\left(\frac{\frac{1}{c^2} + 2}{c + 2c^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{\frac{1}{c^2} - 2}{c-1}\right) \cdot \frac{\frac{1}{c^2} + 1}{c^{\frac{1}{2}}}$;
 г) $\frac{\frac{1}{a^2} - b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^4} + b^{\frac{1}{4}}} + \frac{\frac{1}{a^2} - b^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{a^4} - b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{3}{4}} - b^{\frac{3}{4}}}{a^2 + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} - b^2}$.

1299. Упростите выражение:

- а) $\left(\frac{\left(m^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{3}{4}}\right)\left(m^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{3}{4}}\right)}{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}} - \sqrt{mn}\right) \cdot 10(2\sqrt{2,5(m+n)} - 1)$;
 б) $\left(p(1-p)^{-\frac{2}{3}} + \frac{p^2}{(1-p)^{\frac{5}{3}}}\right) : \left((1-p)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-2p+p^2)^{-1}\right)$;
 в) $\left(1 - \left(y(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{-1} \cdot (1+y^2)^{-1} \times$
 $\times \left(y^0(1+y^2)^{\frac{1}{2}} - y^2(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$;
 г) $\left(\frac{(tr)^{\frac{4}{3}}}{3\sqrt{tr^2}} - (1-t)^{-1}\right) \cdot \frac{t^0 + t(t-2)}{\frac{1}{t-2} - t + 1} : \sqrt{\frac{1}{(t+1)^{-2}}}$.

1300. Найдите значение выражения:

- а) $\left(x^{-\frac{3}{2}}y(xy^{-2})^{-\frac{1}{2}}(x^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ при $x = 2 - \sqrt{3}$; $y = \sqrt{3} - 1$;
 б) $\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt{a-b}}{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$ при $a = 2 + \sqrt{3}$; $b = 2 - \sqrt{3}$.

1301. Решите уравнение:

- а) $|x+3| = 2(2-x)$; г) $|x^2+4x+2| = -x-2$;
 б) $|x+1| - |x-1| = 2$; д) $|x^2+4x+2| = |x+2|$;
 в) $x^2 + |x-1| = 1$; е) $|x^2+4x+2| = -x^2-4x-2$.

1302. Решите неравенство:

- а) $(i^2 - 5x + 6)(i^2 - 1) > 0$;
 б) $(j+2)(j^2+j-12) > 0$;
 в) $(k^2 - 7k + 12)(k^2 - k + 2) \leq 0$;
 г) $(e^2 - 3e - 4)(e^2 - 2e - 15) \leq 0$;
 д) $(m-2)^3(m+1)(2-m)^2 < 0$;
 е) $(n+3)^2(n-2)(5+n)^3 < 0$.

1303. Решите неравенство:

- а) $\frac{y^2-7y-8}{y^2-64} < 0$; г) $\frac{z^2+7z+10}{z^2-4} < 0$;
 б) $\frac{5a^2-3a-2}{1-a^2} \geq 0$; д) $\frac{b^2-16}{2b^2+5b-12} > 0$;
 в) $\frac{2c^2-5c+2}{4c^2+4c+1} \leq 0$; е) $\frac{d^2-2d-35}{12d^2-11d+2} < 0$.

1304. Решите неравенство:

- а) $\frac{2j+3}{1-j} > 5$; д) $\frac{2}{m+2} < \frac{1}{m-3}$;
 б) $\frac{2k+3}{k+1} > 2$; е) $\frac{1}{1-n} < \frac{3}{n+3}$;
 в) $\frac{1-3l}{1-2l} < 1$; ж) $\frac{3}{2-p} > \frac{1}{p+3}$;
 г) $\frac{3e-7}{2-5e} > -1$; з) $\frac{2}{g+3} < \frac{1}{2g-1}$.

1305. Решите неравенство:

- а) $z^4 - 4z^2 + 4 \leq 0$; в) $\frac{v-2}{v+2} \geq \frac{2v-3}{4v-1}$;
 б) $\frac{5-u}{2u} - u^2 > 1$; г) $\frac{a}{a^2-3a+1} \geq \frac{a}{a^2+3a+2}$.

1306. Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} z^2 - (c+z)b - c^2 = 0, \\ \frac{z^2 - 2(z-b) + b^2}{5c-2} = c; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} (l+k)^2 - 6j(l+k) = h^2 - 2hj - 8j^2, \\ (l-k)^2 - (h+1)(l-k) = h+2; \end{cases}$
 в) $\begin{cases} \frac{q^2 - (e^2 + r^2) + t^2}{r+t} = q, \\ (q-e)(t+r) = 0; \end{cases}$
 г) $\begin{cases} \frac{s^2}{d-f} + \frac{g^2}{d+f} = s+g, \\ g-s = 2f. \end{cases}$

1307. Угол CDE треугольника CDE равен α . Найдите угол COE , где O — центр вписанной окружности.

1308. В прямоугольном треугольнике с катетами, равными a и b , проведена биссектриса прямого угла. Найдите расстояние между точками пересечения высот двух полученных треугольников.

1309. Прямая, перпендикулярная двум сторонам параллелограмма со сторонами, равными a и b , причем $a < b$, делит его на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол параллелограмма.

1310. Через середину полуокружности, ограничивающей полукруг с диаметром AB , проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. Найдите, в каком отношении эти прямые делят диаметр AB .

1311. Найдите площадь пересечения двух кругов, один из которых ограничен окружностью, целиком расположенной внутри данного квадрата $KLMN$ со стороной k , касается в точке A его стороны KL , а также касается стороны LM и диагонали KM , второй — окружностью с центром в точке K , проходящей через точку A .

1312. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне шести окружностей с радиусами, равными $\frac{a}{\sqrt{2}}$, и с центрами в вершинах правильного шестиугольника со стороной a .

ГЕОМЕТРИЯ

Две прямые

Две прямые a и b могут быть параллельными (рис. 411) или пересекающимися (рис. 412).

Пересекающиеся прямые разделяют плоскость на четыре угла, пары которых имеют специальные названия. Углы 1 и 2, которые имеют общую сторону, называют *смежными*, а углы 1 и 3, стороны каждого из которых являются продолжениями сторон другого угла, — *вертикальными*. Смежные углы вместе составляют 180° , а вертикальные углы равны друг другу.

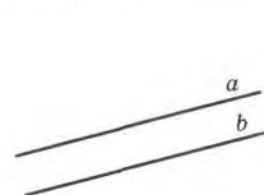


Рис. 411

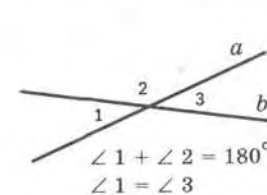


Рис. 412

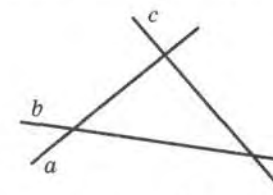


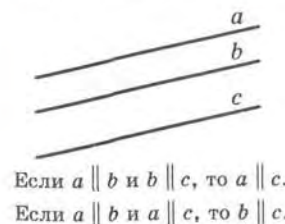
Рис. 413

Три прямые

Среди трех прямых a , b , c может не быть параллельных прямых (рис. 413) или такие прямые могут быть. Если параллельные прямые a и b есть, то третья прямая c может быть параллельной им (рис. 414) или пересекать их (рис. 415).

Если две прямые a и b пересечены третьей прямой, то образуются 8 углов (рис. 416). Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*, углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренними накрест лежащими*, углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренними односторонними*.

Свойства параллельных прямых: если прямые a и b параллельны, то соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние вместе составляют 180° .



Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
Если $a \parallel b$ и $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Рис. 414

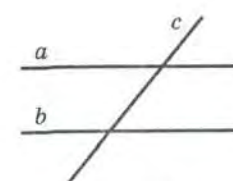


Рис. 415

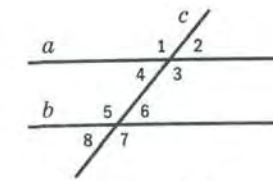


Рис. 416

1313. Через точку A , взятую вне окружности с радиусом R , одна секущая проведена через центр, другая — на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра. Найдите площадь части круга, заключенной между этими секущими.

1314. Есть четырехугольник $TUVX$, в котором углы XTU и XUV прямые, а стороны XU и XV соответственно равны a и b . Найдите расстояние между центрами двух окружностей, одна из которых проходит через точки X , T и U , а другая — через точки U , V и X .

1315. Через точки M и N , выбранные на стороне AB треугольника ABC так, что $AM:MN:NB = 1:2:3$, проведены прямые, параллельные стороне AC . Найдите площадь части треугольника, заключенной между этими прямыми, учитывая, что площадь треугольника ABC равна S .

1316. Углы BAH и ABH , где H — точка пересечения высот треугольника ABC , соответственно равны α и β . Найдите углы треугольника ABC .

* * *

1317. Докажите, что все члены a_n последовательности (a_n) , у которой $a_1 = a_2 = 1$ и $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ ($n > 2$), являются натуральными числами.

1318. Найдите все многочлены $f(x)$, для которых истинно тождество

$$xf(x-1) = (x-5)f(x).$$

1319. Отрезки AK и CN — биссектрисы треугольника ABC . Докажите, что если $AB > BC$, то $AN > NK > KC$.

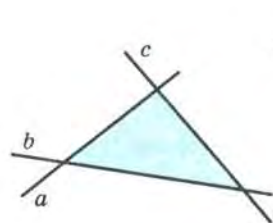


Рис. 417

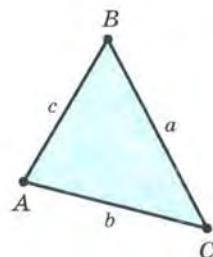


Рис. 418

Признаки параллельных прямых: прямые a и b параллельны, если соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, а внутренние односторонние вместе составляют 180° .

Три попарно пересекающиеся прямые выделяют из плоскости треугольник (рис. 417).

Треугольник

Свойства треугольника (рис. 418):

сумма внутренних углов равна 180° ($\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$);

каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности ($b - c < a < b + c$; $a - c < b < a + c$; $a - b < c < a + b$);

большему углу соответствует большая противоположная сторона; если $\angle A > \angle C$, то $a > c$;

большей стороне соответствует больший противоположный угол (если $a > c$, то $\angle A > \angle C$);

теорема косинусов: квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$);

теорема синусов: стороны пропорциональны синусам противоположных углов ($\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$).

Кроме сторон и углов, треугольник имеет другие элементы.

Внешний угол треугольника — угол, смежный с его внутренним углом (рис. 419).

Внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, не смежных с ним ($\angle BAD = \angle B + \angle C$).

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 420).

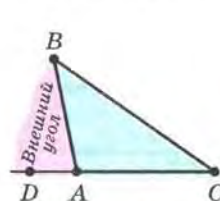


Рис. 419

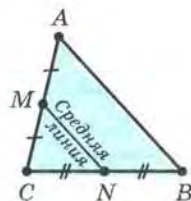


Рис. 420

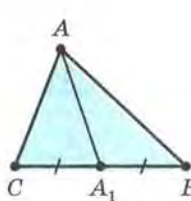


Рис. 421

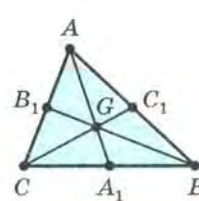


Рис. 422

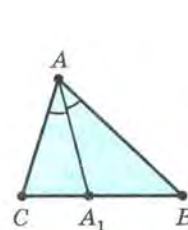


Рис. 423

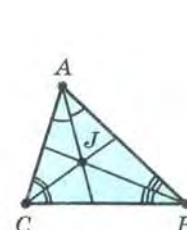


Рис. 424

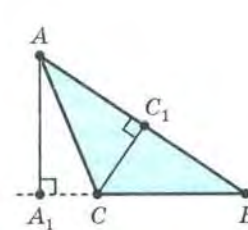


Рис. 425



Рис. 426

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине ($MN \parallel AB$, $MN = \frac{1}{2} AB$).

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 421).

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая отсекает от каждой из них третью долю, если считать от стороны (рис. 422)

$$\left(A_1G = \frac{1}{3} AA_1, B_1G = \frac{1}{3} BB_1, C_1G = \frac{1}{3} CC_1 \right).$$

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, заключенный между его вершиной и противоположной стороной (рис. 423).

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам ($\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$). Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 424).

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, проходящую через противоположную его сторону (рис. 425).

Прямые, проходящие через высоты треугольника, пересекаются в одной точке (рис. 426).

Площадь треугольника равна половине произведения стороны и проведенной к ней высоты, или произведению высоты треугольника и перпендикулярной ей средней линии, или половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними, или квадратному корню из произведения полупериметра и трех разностей полупериметра с каждой стороной, или произведению полупериметра и радиуса вписанной окружности, или произведению трех сторон треугольника, разделенному на учетверенный радиус описанной окружности (рис. 427);

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA); S = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 = \\ &= AA_1 \cdot MN = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \\ &= \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} = pr = \\ &= \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \end{aligned}$$

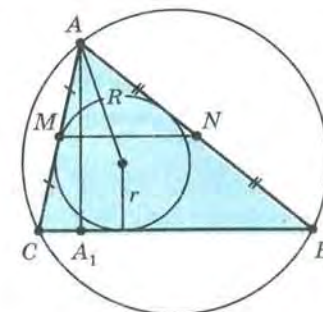


Рис. 427

Прямоугольный треугольник

Два угла треугольника обязательно острые, а третий — больший — его угол может быть и острым (рис. 428), и прямым (рис. 429), и тупым (рис. 430). В соответствии с этим треугольники разделяют на *остроугольные*, *прямоугольные*, *тупоугольные*.



Рис. 428

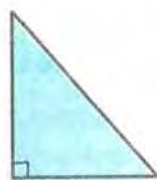


Рис. 429



Рис. 430

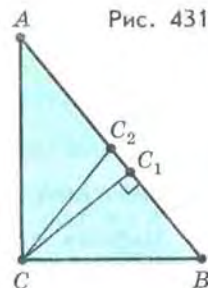


Рис. 431

Свойства прямоугольного треугольника (рис. 431):

острые углы вместе составляют 90° ($\angle A + \angle B = 90^\circ$);

теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов ($AB^2 = AC^2 + BC^2$);

если катет лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы;

если катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° ;

медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине этой гипотенузы и является радиусом описанной окружности ($CC_2 = AC_2 = BC_2$).

высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, является средним геометрическим отрезков, на которые она разделяет гипотенузу, а катет является средним геометрическим гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу ($CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1}$, $AC = \sqrt{AB \cdot AC_1}$, $BC = \sqrt{AB \cdot BC_1}$);

синус острого угла равен отношению противоположного катета к гипотенузе; косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе; тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему; котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему ($\sin A = \frac{BC}{AB}$; $\cos A = \frac{AC}{AB}$; $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$; $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$).

Признаки прямоугольного треугольника. Треугольник является прямоугольным, если:

сумма двух каких-нибудь его углов равна 90° ;

квадрат большей его стороны равен сумме квадратов двух других сторон;

одна из его медиан равна половине стороны, к которой проведена.

Равнобедренный треугольник

Если треугольник имеет равные стороны, его называют *равнобедренным* (рис. 432). Равнобедренный треугольник с тремя равными сторонами называют *равносторонним* (рис. 433).



Рис. 432

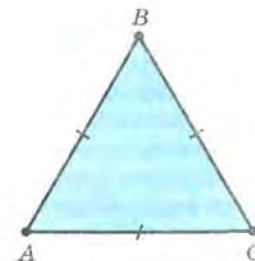


Рис. 433

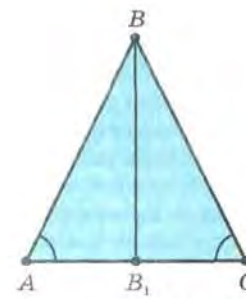


Рис. 434

Свойства равнобедренного треугольника (рис. 434):

углы при основании равны ($\angle A = \angle C$);

медиана, биссектриса, высота, проведенные к основанию, совпадают (если BB_1 — медиана, то BB_1 — биссектриса и высота; если BB_1 — биссектриса, то BB_1 — медиана и высота; если BB_1 — высота, то BB_1 — биссектриса и медиана).

Признаки равнобедренного треугольника. Треугольник является равнобедренным, если:

две его стороны равны;

два его угла равны;

медиана и высота, или медиана и биссектриса, или высота и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают.

Равенство фигур

Равные фигуры — фигуры, совпадающие при наложении, или фигуры, которые преобразуются друг в друга определенным движением.

Признаки равенства треугольников. Треугольники являются равными, если они имеют равные:

угол и прилежащие к нему стороны;

сторону и прилежащие к ней углы;

три стороны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников. Прямоугольные треугольники являются равными, если у них соответственно равны:

катеты;

катет и прилежащий к нему острый угол;

гипотенуза и острый угол;

гипотенуза и катет.

Подобие фигур

Теорема Фалеса: Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то эти прямые на другой стороне высекают также равные отрезки.

Подобные треугольники — треугольники, углы которых попарно равны, а соответственные стороны пропорциональны.

Признаки подобия треугольников. Треугольники являются подобными, если у них:

имеется по равному углу, а прилежащие к нему стороны пропорциональны;

имеется по две пары равных углов;
все три стороны пропорциональны.

Отношение любых соответственных линейных элементов подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия. Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия. Отношение объемов подобных фигур тел равно кубу коэффициента подобия.

Окружность и круг

Отношение длины C окружности к ее диаметру d является одним и тем же для любой окружности (рис. 435). Это отношение выражает число, которое обозначается π ($\pi = \frac{C}{d} = 3,141592\dots$).

Длина C окружности, площадь S соответствующего круга и их радиус r связаны формулами: $C = 2\pi r$; $S = \pi r^2$; $S = \frac{C}{2} r$.

Окружность и угол

Угол, вершина которого находится в центре круга, называется *центральным углом*.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны имеют с окружностью общие точки, называется *вписанным углом* (рис. 436).

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Вписанный угол, который опирается на диаметр, является прямым. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами данного угла, а другая — между сторонами угла, вертикального данному.

Угол, вершина которого находится вне круга, а стороны пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг, которые данный угол отсекает из окружности.

Окружность и прямая

Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Касательная — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку (рис. 437).

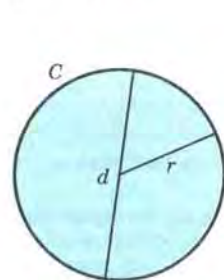


Рис. 435



Рис. 436



Рис. 437

Свойство касательной: касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Свойство касательной. Прямая является касательной, если она проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Угол между секущей и касательной, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, которую этот угол заключает.

Произведение частей хорды, на которые она разделяется своей внутренней точкой, есть величина постоянная, равная $r^2 - a^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки.

Если секущая проходит через точку вне круга, то произведение отрезков, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, есть величина постоянная, равная $a^2 - r^2$, где r — радиус круга, a — расстояние от центра до выбранной точки.

Если секущая и касательная проходят через данную точку вне круга, то произведение отрезков касательной, соединяющих эту точку с точками пересечения секущей с окружностью, равно квадрату отрезка касательной с концами в данной точке и точке касания.

Отрезки двух касательных, проведенные через одну точку, заключенные между этой точкой и точками касания, равны друг другу.

Окружность и треугольник

Окружность, вписанная в многоугольник, — окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

Окружность, описанная около многоугольника, — окружность, проходящая через все вершины многоугольника.

Центр вписанной окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника.

Центр описанной окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с другими элементами треугольника формулами: $r = \frac{S}{p}$; $R = \frac{abc}{4S}$; $\frac{a}{\sin A} = D = 2R$ (рис. 438).

Четырехугольник

Плоская замкнутая четырехзвенная ломаная выделяет из плоскости *четырёхугольник*. Четырёхугольник на рисунке 439 — *выпуклый*, а на рисунке 440 — *невыпуклый*. Обычно рассматривают выпуклые четырёхугольники.

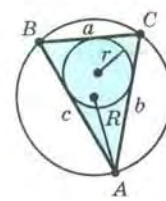


Рис. 438



Рис. 439



Рис. 440

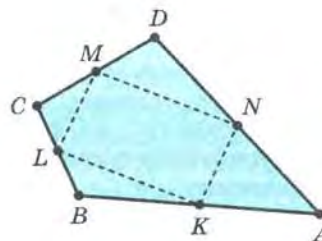


Рис. 441

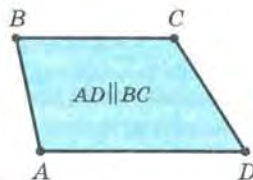


Рис. 442

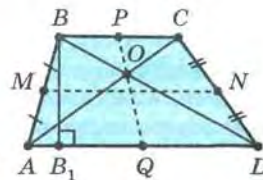


Рис. 443

Свойства четырехугольника:

сумма внутренних углов равна 360° ;

середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 441);

площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Трапеция

Трапеция — четырехугольник, имеющий параллельные стороны (рис. 442).

Свойства трапеции (рис. 443):

сумма углов, прилежащих к боковой стороне, равна 180° ; $\angle A + \angle B = 180^\circ$; $\angle C + \angle D = 180^\circ$;

средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме; $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$;

площадь трапеции равна произведению ее средней линии и высоты; $S_{ABCD} = BB_1 \cdot MN$;

из треугольников, на которые диагонали разделяют трапецию, треугольники, прилежащие к ее основаниям, — подобные, а треугольники, прилежащие к боковым сторонам, — равновеликие; $\triangle AOD \sim \triangle BOC$; $S_{AOB} = S_{DOC}$.

Признаки трапеции. Четырехугольник является трапецией, если:

он имеет параллельные стороны; $AD \parallel BC$ или $AB \parallel CD$;

сумма углов, прилежащих к какой-нибудь стороне, равна 180° ; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ или $\angle B + \angle C = 180^\circ$ или $\angle C + \angle D = 180^\circ$ или $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон; $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$

или $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$;

из четырех треугольников, на которые диагонали разделяют четырехугольник, два треугольника, прилежащие к противоположным сторонам, равновеликие; $S_{AOB} = S_{DOC}$ или $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Параллелограмм

Параллелограмм — трапеция, у которой боковые стороны параллельные (рис. 444).

Свойства параллелограмма (рис. 445):

сумма углов, прилежащих к любой его стороне, равна 180° ; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$; $\angle C + \angle D = 180^\circ$ и $\angle D + \angle A = 180^\circ$;

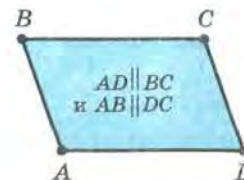


Рис. 444

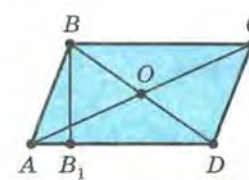


Рис. 445

его противоположные стороны параллельны и равны; $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$; $AD = BC$ и $AB = CD$;

его противоположные углы равны; $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

точка пересечения диагоналей делит их пополам; $AO = CO$; $BO = DO$;

точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма;

площадь равна произведению стороны и проведенной к ней высоты; $S_{ABCD} = AD \cdot BB_1$.

Признаки параллелограмма. Четырехугольник является параллелограммом, если:

суммы углов, прилежащих к каким-нибудь двум смежным сторонам, равны 180° каждая; $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle B + \angle C = 180^\circ$ или $\angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle C + \angle D = 180^\circ$ или $\angle C + \angle D = 180^\circ$ и $\angle D + \angle A = 180^\circ$ или $\angle D + \angle A = 180^\circ$ и $\angle A + \angle B = 180^\circ$;

его противоположные стороны параллельны; $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$;

его противоположные стороны равны; $AD = BC$ и $AB = CD$;

он имеет пару противоположных параллельных и равных сторон; $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ или $AB = CD$ и $AB \parallel CD$;

его противоположные углы равны; $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$;

его диагонали точкой пересечения делятся пополам; $AO = CO$ и $BO = DO$.

Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого имеется прямой угол (рис. 446).

Свойства прямоугольника (рис. 447):

все его углы равны друг другу и прямые; $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$;



Рис. 446

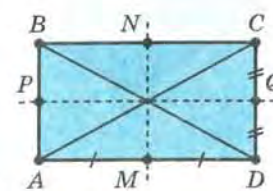


Рис. 447

его диагонали равны; $AC = BD$;
серединные перпендикуляры к его сторонам являются осями симметрии;

его площадь равна произведению смежных сторон; $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

Признаки прямоугольника. Параллелограмм является прямоугольником, если:

его диагонали равны; $AC = BD$;

серединный перпендикуляр к какой-нибудь стороне параллелограмма является его осью симметрии; MN — ось симметрии или PQ — ось симметрии.

Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого имеются равные смежные стороны (рис. 448).

Свойства ромба (рис. 449):

все его стороны равны друг другу; $AB = BC = CD = DA$;

его диагонали перпендикулярны; $AC \perp BD$;

его диагонали делят углы пополам; $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;

прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии;

его площадь равна половине произведения диагоналей; $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если:

он имеет пару равных смежных сторон; $AB = BC$ или $BC = CD$ или $CD = DA$ или $DA = AB$;

его диагонали перпендикулярны; $AC \perp BD$;

его диагонали делят углы пополам; $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle DCA$;

прямые, которым принадлежат его диагонали, являются осями симметрии.

Квадрат

Квадрат — прямоугольник, у которого имеются равные смежные стороны или ромб, у которого имеется прямой угол (рис. 450).

Поскольку квадрат является и прямоугольником и ромбом, то у него имеются все свойства прямоугольника и все свойства ромба.



Рис. 448

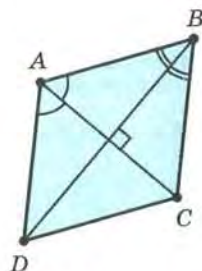


Рис. 449



Рис. 450

Окружность и четырехугольник

Свойство описанного четырехугольника (рис. 451): суммы противоположных сторон равны.

Признак описанного четырехугольника. Четырехугольник является описанным около окружности, если у него равны суммы противоположных сторон; $AB + CD = BC + AD$.

Свойство вписанного четырехугольника (рис. 452):

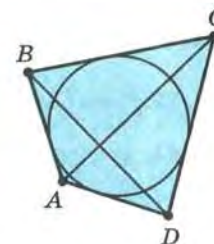


Рис. 451

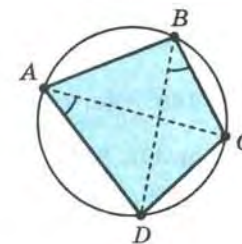


Рис. 452

а) суммы противоположных углов равны 180° ; $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

б) произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон; $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Признаки вписанного четырехугольника. Четырехугольник является вписанным в окружность, если:

а) сумма противоположных углов равна 180° ; $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

б) углы, каждый из которых образован стороной и диагональю и которые опираются на одну сторону, равны; $\angle ACB = \angle ADB$ или $\angle BAC = \angle BDC$ или $\angle CAD = \angle CBD$ или $\angle ACD = \angle ABD$.

Раздел I

2. 100° , 260° . 5. 90° . 8. а) 59° ; б) 65° ; в) 72° ; г) 36° . 11. а) 75° , 105° , 65° ; б) 75° , 105° , 75° ; в) 50° , 224° , 30° ; г) 100° , 40° , 105° ; д) 130° , 230° , 10° ; е) 116° , 134° , 26° . 12. а) 30° , 195° ; б) 94° , 162° ; в) 50° , 166° ; г) $7^\circ 30'$, 100° . 13. 50° , 63° , 73° . 14. 40° , 47° , 141° . 15. а) 100° ; б) 47° ; в) 60° ; г) 36° ; д) 60° ; е) 45° . 17. 120° , 240° . 18. б) 2α ; $180^\circ - 2\alpha$. 21. а) $\frac{c}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{c^2 + 4m^2}{8m}$. 22. б) $\sin^2 \alpha$; в) 45° ; г) 2α , $180^\circ - 4\alpha$, 2α ; д) 30° . 23. а) 120° ; б) $24\sqrt{3}$ см. 24. а) 122° ; б) ≈ 315 дм. 29. 9 и 49. 30. а) $(2; 5)$, $(\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3})$; б) $(2; 1)$, $(-1; -3,5)$; в) $(2; -4)$, $(14; 4)$; г) $(2; 6)$, $(-3; -\frac{2}{3})$. 46. 122° , 26° , 32° . 50. а) $\cos \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{a}{r}$; б) 2γ ; в) 120° . 53. а) $(\frac{r}{a})^2 + (\frac{b}{r})^2 = 1$; б) $b = a \sin \alpha \cos \alpha$; в) $r = a \sin \alpha$; г) $b = r \cos \alpha$. 54. а) 35° , 125° ; б) 120° , 30° ; в) 25° , 115° , 40° . 55. 90° , 45° , 45° ; 12 см, 12 см, $12\sqrt{2}$ см. 56. 100° , 40° , 40° . 57. 80° , 60° , 40° . 59. а) 40; б) 120; в) 2; г) $1,2\sqrt{1,4}$. 60. 24. 61. 4. 62. а) 15; б) 16. 63. а) 22 см; б) $\sqrt{193}$ см. 64. а) 4 см, 14 см; б) 10 см, 12 см. 75. $\frac{\sqrt{17}}{4}$. 81. а) 20 см; б) $8\sqrt{2}$ см; в) $\approx 106^\circ$; г) 13,44 м; д) $\approx 73^\circ$. 83. 125° , 120° , 115° . 85. 110° . 86. 160° . 87. $k - c$. 88. 3; 17; 17; 7; 7; 3. 89. $\frac{a-b+c}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{-a+b+c}{2}$. 90. 25. 91. 40 м. 92. а) 600 мм; б) 400 мм. 93. а) 102 мм; б) 27 см. 95. 10 м. 96. 4,8; $9\frac{19}{30}$. 98. а) 70° , 20° , 90° ; б) 56° , 34° , 90° . 99. а) 63° , 54° , 63° ; б) 65° , 50° , 65° . 101. $d \cos \beta$, $d \sin \beta$. 102. а) 30,5; б) 10 или $\frac{10}{\sqrt{3}}$; в) 12,3. 103. $12\sqrt{3}$. 104. а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 105. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. 106. 48. 110. $\angle BOC < \angle AOC < \angle AOB$. 113. $2R \sin \frac{\alpha}{2}$, $2R \sin \frac{\beta}{2}$, $2R \sin \frac{\gamma}{2}$. 114. а) $\frac{m+n-\sqrt{m^2+n^2}}{2}$; б) $\frac{k}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha - 1)$; в) $\sqrt{\frac{5}{\sin 2\alpha}} (\cos \alpha + \sin \alpha - 1)$; г) $\frac{P (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{2 (\sin \alpha + \cos \alpha + 1)}$. 115. а) $\frac{a \sin \alpha}{2 (1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$; б) $\frac{a \sqrt{4b^2 - a^2}}{2(2b+a)}$; в) $\frac{a \cos \frac{\alpha}{2}}{2(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$; г) $\frac{h \sin \beta \sin 2\beta}{2(1 + \cos \beta)}$; д) $\frac{\sqrt{25 \sin \alpha}}{2(1 + \sin \frac{\alpha}{2})}$.

- е) $\frac{P \sin 2\beta}{4(1 + \cos \beta)^2}$; ж) $\frac{R \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$; з) $\frac{h_2(2h_1 - h_2)}{4h_1}$. 117. а) 1; б) 3; в) 2; г) 6. 118. а) 2, -16, 24; б) -4, 4, 23; в) 3, -36, 96; г) 2, 8, 15. 121. 672. 125. 132 см. 126. 12 см, 18 см, 16 см, 10 см. 128. 120. 130. а) 4, 6; б) 8, 12; в) $34 \pm 7\sqrt{19}$; г) 18 и 32. 131. 7 и 21. 137. 240 мм. 138. 1,2 м. 140. а) $\frac{1}{2} a \sin \alpha$; б) $\frac{mn}{m+n} \sin \beta$. 142. 26 см. 143. а) $2R^2$; б) $2R^2$. 149. 30° . 150. а) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{13\sqrt{2}}{2}$; г) $8\frac{1}{8}$. 151. $c \sqrt{\frac{c^2 + ab}{4c^2 - (a-b)^2}}$. 152. а) $\cos C = \frac{l}{k} - 1$; $2k - l$; б) 60° ; в) $MN = \frac{v(t+a)}{u}$. 157. а) $\frac{cm}{k}$, $\frac{cn}{k}$. 161. а) $[-6; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. 162. а) $(3\frac{5}{7}; +\infty)$; б) $(-\infty; -6]$.

Раздел II

178. а) $(-\infty; -1,5) \cup (1,5; +\infty)$; в) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; г) $(-4; 1)$; д) нет решений; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) -3. 179. а) $(-\infty; 5) \cup (9; +\infty)$; в) $(1; 4)$; ж) нет решений. 180. а) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$; в) $(-\frac{2}{3}; 3)$; е) $a \neq 1$, $a \neq 3$. 181. г) $x \neq 1$; д) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; з) $[-5; 2]$; к) $v \neq 0$, $v \neq 7$, $v \neq -2,5$. 183. а) $[-2; 1]$; б) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$. 184. б) Функция не определена ни в одной точке; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $s \neq 2$. 186. а) $a \geq 9$ и $h = a - 1$. 187. а) $a \geq 1$ и $a + 3$. 188. Не меньше 16 км/ч. 192. 20° . 193. а) 24° , 150° ; б) 113° , 76° ; в) 11° , 160° ; г) 5° , 85° . 194. 18 м. 203. а) $(6; +\infty)$; б) $[-1; 6]$; г) $[6; +\infty) \cup \{-1\}$. 204. а) $(-\infty; -3) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup \{5; 10\}$; в) $(-\infty; -4) \cup (-4; 1)$; г) $(-\infty; -4) \cup \{0\} \cup [9; +\infty)$. 205. а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1\frac{1}{3}) \cup \{1; 2\}$; г) $(-\infty; -1\frac{1}{3}) \cup [\frac{3}{4}; \frac{1}{3}]$. 206. а) $(-4; -1) \cup (\frac{2}{3}; 2,5)$; е) $(-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (\frac{2}{3}; 2,5)$. 207. а) $(-5; 0) \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; з) $[-2; 3]$. 208. б) $(-\infty; -4] \cup [-3; +\infty)$; г) $[-6; 0] \cup [6; +\infty)$; е) $q \neq \pm 2$. 209. а) $(-2; -1) \cup (1; 4)$; б) $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$; в) $\{4\} \cup [5; +\infty)$; г) $[1; 2] \cup \{3\}$; д) $[-\frac{1}{3}; 1] \cup \{2\}$; е) $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 2) \cup (4; +\infty)$; ж) $(-\infty; -\frac{2}{7}) \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$; з) $[-1; -0,2] \cup \{0; 2\}$. 210. а) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; б) $(-4; 1)$; в) $(-\infty; -7) \cup [-3; +\infty)$; г) $(-\infty; -3\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$; ж) $(-1; -0,5) \cup (2; +\infty)$; з) $(-\infty; -2) \cup [-1; 3]$. 212. а) Нет решений; б) $(-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$; д) $(-\infty; -2) \cup (-2; 3)$; е) $[-3; -1,5) \cup (3; +\infty)$. 213. а) $(-3; 1) \cup$

$\cup (4; +\infty)$; б) $[-5; -2] \cup (1; 2]$; г) $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$.

214. а) $(-\infty; -2,5) \cup (3; +\infty)$; д) $\left(-3; -1\frac{2}{3}\right)$; ж) $(-0,6; 1)$. 215. а) $(-\infty; -\sqrt{6}) \cup (0; 2) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$; б) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$; в) $(-1; 1) \cup (1; 8]$; г) $(-\infty; -\sqrt{15}) \cup (-3; 0) \cup (\sqrt{15}; +\infty)$; д) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$; е) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. 216. а) $(-3; -2) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; б) $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; в) $(-\infty; -7) \cup [-4; 6]$; г) $(-\infty; 0,5] \cup \{1,5\} \cup (2,5; +\infty)$.

217. а) $(-\infty; -0,2) \cup (-1; 1) \cup (4; 6)$; б) $(-3; -1) \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right)$; в) $(-\infty; -5) \cup (0,2; 2)$; г) $\left[-\frac{3}{7}; 1\right] \cup \{3\} \cup [2,5; +\infty)$. 218. а) $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right)$; б) $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. 219. а) $(-1; 2]$; б) $(-\infty; -2) \cup [7; +\infty)$; в) $[-5; -1]$; г) нет решений. 221. а) $(-1,5; 0)$; б) $(-1; 0) \cup (6; 7)$; в) $(-1; 1) \cup (2; 4)$; г) $(1; 7)$.

223. а) $g \neq \pm\sqrt{6}$; б) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $[-3; -2] \cup [2; 3]$; г) $(-\infty; \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

224. а) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2) \cup \left(2; 2\frac{1}{3}\right) \cup \left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; г) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. 225. а) $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$; б) $\left[-\frac{3+\sqrt{37}}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{\sqrt{37}-3}{2}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 2-\sqrt{3}) \cup (0,5; 2) \cup (2+\sqrt{3}; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}; 0\right)$; д) $(-\infty; 1-\sqrt{5}) \cup (1; 2)$; е) $(-2; -1,25) \cup (-1; 1) \cup (5; +\infty)$. 229. 7,5.

236. а) $(-\infty; 1-\sqrt{1-p}) \cup (1+\sqrt{1+p}; +\infty)$ при $p \leq 1$; решений нет при $p > 1$; б) $(g-\sqrt{g^2-3}, g+\sqrt{g^2-3})$ при $|g| < \sqrt{3}$; $s=g$ при $|g| = \sqrt{3}$; решений нет при $|g| > \sqrt{3}$; в) $\left(-\infty; \frac{-r-\sqrt{r^2-32}}{4}\right) \cup \left(\frac{-r+\sqrt{r^2-32}}{4}; +\infty\right)$ при $|r| > 4\sqrt{2}$; $(-\infty; +\infty)$ при $|r| \leq 4\sqrt{2}$; г) $\left(-\infty; \frac{2+c-\sqrt{c^2+4c-12}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+c+\sqrt{c^2+4c-12}}{2}; +\infty\right)$ при $c \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$; решений нет при $c \in (-6; 2)$. 237. $\left(\frac{3-2a+\sqrt{73-12a}}{2(a-4)}; \frac{3-2a-\sqrt{73-12a}}{2(a-4)}\right)$ при $a < 4$; $(-1,6;$

$+\infty)$ при $a=4$; $\left(-\infty; \frac{3-2a-\sqrt{73-12a}}{2(a-4)}\right) \cup \left(\frac{3-2a+\sqrt{73-12a}}{2(a-4)}; +\infty\right)$; при $4 < a < 6\frac{1}{12}$; $t \neq -2,2$ при $a=6\frac{1}{12}$; $(-\infty; +\infty)$ при $a > 6\frac{1}{12}$.

238. г) $\left(-\infty; \frac{-m-\sqrt{m^2-32m+60}}{2}\right) \cup \left[\frac{-m+\sqrt{m^2-32m+60}}{2}; +\infty\right)$ при $m \in (-\infty; 2) \cup (30; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$ при $m \in [2; 30]$. 239. а) $(-\infty; c+1-\sqrt{c^2-7c+6}) \cup (c+1+\sqrt{c^2-7c+6}; +\infty)$ при $c \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$; решений нет при $c \in (1; 6)$; б) $(-\infty; +\infty)$ при $b \in (-\infty; -0,8] \cup [2; +\infty)$; $(-\infty; -3-\sqrt{8+6b-5b^2}) \cup [-3+\sqrt{8+6b-5b^2}; +\infty)$ при $b \in (-0,8; 2)$; в) $\left[\frac{-2k-3-\sqrt{-4k-3}}{2}; \frac{-2k-3+\sqrt{-4k-3}}{2}\right)$ при $k < -0,75$; $x = -0,75$ при $k = -0,75$; решений нет при $k > -0,75$; г) $(-\infty; 4m-1-\sqrt{m^2-6m+8}) \cup [4m-1+\sqrt{m^2-6m+8}; +\infty)$ при $m \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$; $(-\infty; +\infty)$ при $m \in [2; 4]$. 240. а) $\left(-\infty; \frac{-b+\sqrt{b^2+16b}}{2b}\right) \cup \left(\frac{-b-\sqrt{b^2+16b}}{2b}; +\infty\right)$ при $b \in (-\infty; -16)$; $(-\infty; +\infty)$ при $b \in [-16; 0]$; $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2+16b}}{2b}; \frac{-b+\sqrt{b^2+16b}}{2b}\right)$ при $b \in (0; +\infty)$; б) нет решений при $d \in (-\infty; -2)$; $t \in [1,5; +\infty)$ при $d = -2$; $(-\infty; +\infty)$ при $d \in \left(-2; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$; $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{3-d-d^2}}{d+2}\right) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{3-d-d^2}}{d+2}; +\infty\right)$ при $d \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$; в) $\left[\frac{d+1-\sqrt{4+2d-2d^2}}{d+1}; \frac{d+1+\sqrt{4+2d-2d^2}}{d+1}\right]$ при $d \in (-1; 2)$; $x=1$ при $d=2$; решений нет при $d > 2$; г) $(-\infty; +\infty)$ при $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 1)$; $\left(-\infty; \frac{3-4a+\sqrt{-4a^2-8a-3}}{2(a-1)}\right) \cup \left(\frac{3-4a-\sqrt{-4a^2-8a-3}}{2(a-1)}; +\infty\right)$ при $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$; $(-\infty; -2)$ при $a=1$; решений нет при $a > 1$.

244. а) $(-\infty; 6n] \cup [-4n; +\infty)$ при $n < -0,5$; $[6n; -4n]$ при $n \in (-0,5; 0)$; $y=0$ при $n=0$; $[-4n; 6n]$ при $n > 0$; б) $S > 0$ при $t \leq 0$; $(-\sqrt{t}; 0) \cup (\sqrt{t}; +\infty)$ при $t > 0$. 245. а) $0; -8\frac{1}{3}; 1$; б) $1,5; 18\frac{1}{6}$. 246. а) $1\frac{10}{23}$; б) ни при каком; в)

2; г) -3 . 247. $\left(-\infty; \frac{13+\sqrt{709}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{709}-13}{15}; +\infty\right) \cup \{-2\}$. 248. $\left(0; \frac{7\pm\sqrt{33}}{8}\right)$. 249. $(-5; +\infty)$. 250. $(0; 1, 2)$. 251. $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ при любом значении c . 252. а) $x_1 x_2 < 0$ при $m \in (0; 1)$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при $m \in (-4; 0)$; б) $y_1 y_2 < 0$ при $m \in \left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right)$; $y_1 = 0$, $y_2 > 0$ при $m = -\frac{1}{7}$; $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ при $m \in \left(-3; -\frac{1}{7}\right)$; в) $z_1 z_2 < 0$ при $m \in (-1, 5; -1)$; $z_1 = 0$, $z_2 > 0$ при $m = -1, 5$; $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ при $m \in \left(-\frac{5+\sqrt{13}}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$; $z_1 < 0$, $z_2 < 0$ при $m \in \left(-1; \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$. 253. $\left(-2; -1\frac{2}{3}\right) \cup (-1; +\infty)$. 254. $2\sqrt{2}$. 255. $(-\infty; -1)$. 257. $(-6; 2)$. 258. $(-1; 6)$. 259. $\left[\frac{5-2\sqrt{43}}{2}; \frac{5+2\sqrt{43}}{2}\right]$. 260. 90° . 261. 10 , $\sqrt{34}$, $\sqrt{74}$; $\cos O = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos C = \frac{7}{\sqrt{74}}$, $\sin B = \frac{50}{2\sqrt{629}}$. 262. а) 21 ; б) 15 . 263. 9 и $3\sqrt{73}$. 264. 21 , $\sqrt{193}$ и 30 , $7\sqrt{5}$, или $23\frac{7}{13}$, $\frac{2\sqrt{2151178}}{221}$ и $27\frac{6}{13}$, $\frac{2\sqrt{3607789}}{221}$. 265. 8 и 7 , или 9 и 6 .

Раздел III

270. $AC = 8$, $BC = 10$. 271. а) $6 + 2\sqrt{3}$; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; в) $6\sqrt{3} - 6$ или $6\sqrt{3} + 10$. 272. $\sqrt{2}$. 273. $9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$. 274. а) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{m}{2\sin(\alpha+\beta)}$; в) $\frac{ab}{2h}$. 275. $6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $12(\sqrt{3}-1)$; $6\sqrt{2}$, $6(\sqrt{3}-1)$. 277. а) $\frac{5\sqrt{13}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{130}}{3}$. 278. $1, 3\sqrt{61}$. 279. $\frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$, $\frac{c\sin\varphi}{\cos\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)}$, $\frac{c\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}$. 283. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. 284. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$. 285. $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$; $\frac{a\sin\gamma}{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}$; $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\beta + \sin\gamma)\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}$. 288. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 289. а) 60° ; б) 120° . 293. а) 7 ; б) 13 ; в) 5 ; г) 13 . 298. $5\sqrt{106}$; $33\frac{1}{3}$. 302. а) $\frac{\sqrt{3}}{2(\sin\alpha + \sin(60^\circ + \alpha))}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 307. 6 и 5 ; 8 и 4 . 308. а) 1 кг, 3 кг; б) 5 м/с, 1 м/с. 309. 20 см и 30 см. 311. а) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$; б) 0 ; в) $3\sqrt{3}$; г) 1 . 312. а) $-\cos^2\alpha$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; в) $\cos 2\lambda$; г) $\sin\omega + \cos\omega$. 317. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{4}$;

г) $\frac{7}{8}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $\frac{1}{2}$; ж) $\frac{1}{4}$; з) $\frac{4}{9}$. 321. а) $\frac{2}{3}$. 323. а) $\frac{a^2}{4}$, $\frac{3a^2}{4}$; б) $\frac{2a^2}{9}$, $\frac{7a^2}{9}$; в) $\frac{6a^2}{25}$, $\frac{19a^2}{25}$. 333. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{3}$. 334. а) 5 ; б) 25 ; в) 5 ; г) 75 . 336. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{1}{5}$. 337. а) $\frac{x}{2}(a+b+x)$; б) $\frac{1}{2}(ay+bx-xy)$; в) $0,094ab$. 339. 585 . 343. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. 344. а) 84 см²; б) $173,6$ см². 347. $S_1 + S_3 - S_2$. 349. $\frac{kl}{m}$. 353. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 355. $\frac{1}{4}$. 356. $\frac{2}{7}$. 357. $\frac{5}{4}$. 358. $\frac{11}{12}$. 359. $\frac{1}{5}$. 366. 600 или $100(4+\sqrt{2})$. 370. а) $(3; 4; 1)$, $(1; 2; 3)$; б) $(1; -4; -3)$, $(-3; 0; 1)$; в) $(2; 3; 4)$, $(-2; -3; -4)$; г) $(2; -4; 5)$, $(-2; 4; -5)$. 373. а) $y = 3x^2 + 12x + 11$; б) $y = \frac{7}{9}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 5$. 379. а) $(1; -2)$; б) $(-2; 5, 5)$; в) $(-5; 13)$; г) $(4, 2; -10)$. 381. а) $x = y$; б) $2x - y + 2 = 0$. 382. а) $(1; 2)$; б) $(1, 5; 0)$. 388. а) $y = -2$; б) $x = 3$; в) $y = x - 5$; г) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; д) $y = -x + 1$; е) $y = -x$. 389. а) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$; б) $(x+4)^2 + y^2 = 80$, $(x+4)^2 + (y+8)^2 = 80$. 390. а) $(0; 0)$; б) $(4; -6)$; в) $(2; -3)$, $(-2; 3)$; г) $\left(\frac{-2+2\sqrt{19}}{9}; \frac{3-3\sqrt{19}}{9}\right)$, $\left(\frac{-2-2\sqrt{19}}{9}; \frac{3+3\sqrt{19}}{9}\right)$. 393. $(2x_2 - x_1, y_1)$, $(x_2, 2y_1 - y_2)$. 394. $(10; 11)$ и $(2; -4)$. 396. $(-2; 1)$. 397. $(23; 9)$ и $(13; 39)$. 398. $(0; -1)$. 399. $(7, 5; 2, 25)$. 400. $(9, 2; 5, 2)$. 402. $\left(3\frac{1}{65}; 1\frac{47}{65}\right)$. 405. а) 4 ; б) $7, 6$; в) $7, 8$; г) $1, 6$. 406. а) $(x-1)(y-1) = 0$; б) $(2x+2y-11)(2x-2y-13) = 0$; в) $(x+y)(x-y-2) = 0$; г) $(x+y-5)(x-y-5) = 0$. 407. а) 13 и $\frac{13}{24}$; $8, 5$; б) $32, 5$; 16 . 414. а) $(x-8)^2 + y^2 = 112$; б) $\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + y^2 = 10\frac{4}{9}$; в) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 8$; г) $\left(x - 5\frac{2}{3}\right)^2 + (y-6)^2 = 44\frac{4}{9}$. 417. $\frac{pq}{p+q}$. 420. 12 . 421. 5 или 7 . 428. 45 дм, 56 дм. 429. $42\,000$ см³, $37\,500$ см³. 434. а) 1 ; $\frac{1}{2}$; б) 2 ; -1 ; в) -3 ; 2 ; г) 3 ; -4 . 436. а) $\frac{1}{144}$; б) $-\frac{1}{1728}$; в) -53 ; г) $-\frac{23}{32}$.

Раздел IV

448. а) 2 ; б) $4\sqrt{6}$; в) $10 + 2\sqrt{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{5}}{10}$. 452. а) $[7; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$. 457. а) $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; б) $(\sqrt[20]{2} - 1) \cdot 100\%$.

458. а) $-\frac{3}{7}$; б) нет решений; в) $\pm\sqrt{17}$. 464. а) $\frac{81}{y^8} - \frac{16}{x^4}$.
465. $50\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{6}-4}{3}}\right)$. 466. $\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. 480. а) 3; б) 0,5; в) 4; г) 4. 483. а) $a \geq 2$; б) $3 \leq b \leq 7$; в) $[-4; -2] \cup [0; +\infty)$; г) $x \geq e$. 484. а) $5|a|$; б) $3c^2$. 488. а) $\sqrt[5]{4-\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$; е) $\sqrt[3]{3-1}$. 497. г) $|s|$. 506. а) $\sqrt[4]{p}$; б) $2\sqrt[4]{n}$; в) $2\sqrt[3]{ef}$; г) 1. 511. а) $3 - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{15-8\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{23-12\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{11-6\sqrt{3}}$; б) $25(4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{222-19\sqrt{69}})$; 37,5($\sqrt{23}-\sqrt{3}$). 512. 40, $50\sqrt{3}$, $\frac{40\sqrt{151}}{13}$, $\frac{90\sqrt{151}}{13}$, $\frac{40\sqrt{21}}{13}$, $\frac{20\sqrt{21}}{13}$. 527. а) $[0; +\infty)$; в) $a \neq 3$.
534. а) 9; б) 25; в) 15; г) $\frac{1}{11}$. 536. а) 1; б) $x^{-\frac{1}{10}}$; в) 1; г) $y^{\frac{2}{5}}$. 546. а) $\sqrt{x}$; б) 1; в) $\frac{s}{t}$; г) $\sqrt[3]{uv}$. 547. б) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0]$; д) $(-\infty; 0]$; е) $(-\infty; 0]$.
566. а) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{b^2\sqrt[4]{b}}$; б) $|kl|\sqrt[6]{-l}$; в) $\frac{z}{\sqrt[3]{t}} + \frac{t}{\sqrt[3]{z}} - \sqrt[3]{zt}$; г) $\sqrt{i}$; д) $\sqrt[5]{\frac{l}{n}}$; е) $|pq|x^2\sqrt[6]{-qx}$. 567. а) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$; б) $\frac{b^2c+2bd\sqrt{cl}+d^2e}{b^2c-d^2e}$; в) $\sqrt{z+t} + \sqrt{z-t}$; г) $p+q-\sqrt{p^2-q^2}$. 569. а) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}$; б) $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[4]{m^3}\sqrt[3]{n}$; в) $\frac{1}{e^3-e^{\frac{3}{2}}f^{\frac{2}{3}}+f^{\frac{4}{3}}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{k}(1-\sqrt{k})}$. 571. а) $\frac{5ab-a^2}{a-b}$; б) $2y$; в) $\frac{3\sqrt[3]{ab}}{a+b}$; г) $2\sqrt[3]{b}$.
572. а) $1-\sqrt[3]{x}$; б) $-m^2$; в) 2; г) $\sqrt{kl}+k$. 573. а) $\sqrt{a(a+1)}$; б) $\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$; в) $1-\sqrt{\frac{q}{p}}$; г) y . 574. а) $\frac{z-\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}$; б) $\frac{1}{|x+y|}$; в) $\sqrt{a^2+b}$; г) $\sqrt{1-c}$.
575. а) n^2-n ; б) 1 при $b > a$, -1 при $b < a$; в) $|a|+|b|$; г) $\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a+1})}{ab+a\sqrt{b}+\sqrt{ab}-1}$.
576. а) $\frac{n+m}{n-m}$; б) $\frac{3}{\sqrt{b-6}}$; в) $(1-f)^2$; г) $\frac{2\sqrt{v}}{w-v}$. 577. а) $2\sqrt[3]{ab}$; б) $2\sqrt[3]{b}$; в) $\frac{3\sqrt[3]{ab}}{b-a}$; г) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. 578. а) $\frac{1}{a}$; б) $\frac{3\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; в) $a-b$; г) $2\sqrt{b}$. 579. а) $\frac{a+1}{a}$; б) $a+1$; в) $\frac{b+1}{\sqrt[4]{6}}$; г) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$; д) $a+b$; е) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. 581. а) $\frac{2}{2-d}$; б) $\frac{2\sqrt{d-1}}{d-2}$.

582. а) $\sqrt{\frac{e}{f}}$; б) $\sqrt{\frac{f}{e}}$. 583. а) $2\sqrt[4]{y}$; б) 10. 584. а) 8; б) нет решений.
589. а) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (1; 5)$; в) $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]$; г) $(-\infty; -0,5) \cup (0; 1,75)$. 590. а) 0; б) $\sqrt{1,5}$; в) 6912; г) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. 592. 18 дм и 36 дм или 84 дм и 72 дм. 593. 4 пары в час и 2 пары в час. 599. а) $y = x^4$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^5$; г) $y = x^{-5}$. 612. а) $y = x^{\frac{1}{4}}$; б) $y = x^{\frac{1}{3}}$. 621. а) $y = x^{\frac{3}{4}}$; б) $y = x^{\frac{2}{3}}$; в) $y = x^{\frac{2}{5}}$; г) $y = x^{\frac{3}{5}}$. 638. а) $(1; 1,5) \cup (2; +\infty)$; б) $(1,5; 5)$; в) $\left(-2; 3\frac{13}{14}\right) \cup (5; +\infty)$; г) $\left(-\infty; 1\frac{4}{7}\right) \cup (4; +\infty)$. 639. а) ± 4 ; б) 5; в) 2; г) 9.
640. а) $[-0,5; 1)$; б) $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(2,6; 4)$; г) $[3; +\infty)$. 641. $10 \pm 2\sqrt{5}$ см. 642. $32 + 4\sqrt{3}$ м, $4\sqrt{19+10\sqrt{3}}$ м, $4\sqrt{48+6\sqrt{3}}$ м или $32 - 4\sqrt{3}$ м, $4\sqrt{19-10\sqrt{3}}$ м, $4\sqrt{48-6\sqrt{3}}$ м. 643. 18 см, 17 см. 655. а) -10,3; б) ± 3 ; в) -1,5; -0,5; г) 9. 656. а) 2; б) 4; в) 2; г) 0,2; д) 4; е) $2\frac{1}{3}$. 657. а) 1; б) -1; в) -1; г) 1. 658. а) 4; б) 0; 2; в) $\pm\sqrt{3}$; г) нет корней. 659. а) -6; 7; б) -7; 8; в) $\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$; г) -1,2; 3. 660. а) 3; б) -1; в) 4; г) $\frac{19-\sqrt{30}}{2}$; д) нет корней; е) 4; ж) 6; з) 2. 661. а) 2; б) 2; в) 1,25; 3; г) 7; 8. 662. а) 4; б) 2; в) 2; г) 3,2; 4. 663. а) -1; 2; б) 2; в) 0; 5; г) 1; 5. 664. а) -6; -4; б) $\sqrt{2}$; в) 7; г) 36. 665. а) ± 4 ; б) 4; в) 0,5; г) $-\frac{1}{6}$; -1. 666. а) -2; 6; б) 1; -4; в) 1; 2; г) -3; 2; д) 1; $\frac{3-2\sqrt{21}}{3}$; е) 1. 667. а) Нет корней; б) нет корней; в) 2; г) 0; д) нет корней; е) $\pm 2\sqrt{2}$. 669. а) -2; б) 7; в) 25; г) 2. 670. а) -1; б) 1; в) ± 1 ; г) нет корней. 671. а) 2; $5\frac{12}{17}$; б) 2; в) $-\frac{1}{511}$; 2; г) -27; 64. 672. а) ± 21 ; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; в) 5; г) 8. 673. а) ± 2 ; б) ± 1 ; в) 0; 5; г) нет корней; д) $[-0,5; 0,5]$; е) $[2; +\infty)$. 674. а) 1; 20; б) 0; в) -2; $\frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2}$; г) 2; д) 1; е) 1; 2; 10. 675. а) 2401; б) 9; в) 2; 3; г) 2; д) -61; 48; е) 16; 81; ж) 1; 32; з) $17 \pm 4\sqrt{14}$; 17 $\pm \sqrt{257}$. 676. а) 2; б) 1; в) -2; 5; г) -88; -24; -15; д) 2; е) $\frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$. 677. а) $-4 \pm 3\sqrt{3}$; б) 2; в) нет корней; г) $\frac{9}{7}$. 678. а) -3; 4; б) 0; в) 1; г) 5. 681. а) $(-2; 3)$; б) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$; в) $\left[\frac{2}{7}; \frac{2}{3}\right]$; г) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; д) $(-\infty; -0,4] \cup [0,8; +\infty)$; е) $(-0,5; 2,75)$. 682. а) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$;

б) $(1; 3)$; в) $(-\infty; -1\frac{2}{3}) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; д) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. 690. а) $[-4; -1]$; б) $(-\infty; -7] \cup [-4; -1]$; в) $(-5; 0)$; г) $(-\infty; -6) \cup (-5; 0)$; д) $[2; +\infty) \cup \{\pm 1\}$; е) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. 691. а) $(-20; 1)$; б) 3 ; в) $(-\infty; -8,5] \cup [1; 10)$; г) $[-3; 6]$; д) $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$; е) $[-2 - 2\sqrt{6}; -1] \cup [-2 + 2\sqrt{6}; +\infty)$. 692. а) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; б) $i \neq -0,5$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(2; 3)$; д) $-1,5$; е) нет решений; ж) $2; 3$; з) нет решений; и) $(-\frac{3}{7}; 13)$. 693. а) $\{-2\} \cup [3; +\infty)$; б) $\{-2; 1\} \cup [3; +\infty)$; в) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; г) $(-\infty; \frac{3}{4}) \cup (4; 7)$. 694. а) $(0; +\infty)$; б) $(1; +\infty)$; в) $(-\infty; -2) \cup (\frac{1-\sqrt{10}}{2}; -1) \cup (3; +\infty)$; г) $(-\infty; \frac{5-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{5-\sqrt{2}}{2}; 2) \cup (3; \frac{5+\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{5+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$. 695. а) $[-1; -\frac{1}{3}]$; б) $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$; в) $[\frac{2}{3}; 1,5) \cup (1,5; 4)$; г) $(-0,5; +\infty)$; д) $(-4; +\infty)$; е) $(1; +\infty)$; ж) $0; +\infty$; з) $(-\sqrt{3}; 3)$; и) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. 696. а) $[-1; 0) \cup (3; +\infty)$; б) $[-1; 1,5]$; в) $(\frac{\sqrt{13}-5}{2}; 1]$; г) $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1]$. 697. а) $[1; 2) \cup (2; +\infty)$; б) нет решений; в) нет решений; г) $(-\infty; 1)$; д) $[1; 2]$; е) $(0,5; +\infty)$. 698. а) $(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$; б) $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty)$; в) $[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}]$; г) $[-3; 13]$; д) $[-2; 2]$; е) $[0; \frac{3+\sqrt{5}}{2})$. 699. а) $(2; +\infty)$; б) $[-6; 3]$; в) $[2\frac{2}{9}; 4) \cup (5; +\infty)$; г) $(-\infty; 3)$; д) $(-\infty; 0]$; е) $(-\infty; 0]$. 700. а) $[0; 3]$; б) $(-\infty; 1]$; в) $[2; +\infty)$; г) $[-\sqrt{5}; 2]$; д) $(2\frac{2}{3}; +\infty)$; е) нет решений. 701. а) $[1; 6]$; б) $(1\frac{5}{19}; +\infty)$; в) $(-\infty; -3]$; г) $(-\infty; -1] \cup [2,5; 3]$; д) $(\frac{2}{3}; +\infty)$; е) $(-\infty; -2] \cup [5; 5\frac{9}{13})$. 702. а) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; б) $[8; +\infty)$; в) $(-\infty; 0] \cup [2; 2\frac{2}{3}]$; г) $[5\frac{9}{13}; +\infty)$; д) $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$; е) нет решений. 703. а) $(1,4; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup [-3; \frac{\sqrt{13}-7}{6}]$; в) $(-\infty; 1] \cup [2; \frac{17+\sqrt{13}}{6}]$; г) $(1; 4]$; д) $[-2; \frac{\sqrt{5}-15}{10}]$; е) $[-6; \sqrt{2}-4]$. 704. а) $(-\infty; -1] \cup [2,5; 3]$; б) $(-\infty; \frac{2}{3}]$; в) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; г) $[2; 3]$; д) $(2; \frac{4\sqrt{3}}{3}]$; е) $(-\infty; -\frac{\sqrt{5}}{6}]$. 705. а) $[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$; б) $(-1; +\infty)$; в) $[-2; 2]$;

г) $(0; +\infty)$; д) $[-1; 0] \cup [1; 3]$; е) $[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; 1) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$. 706. а) $(-\infty; -3) \cup (3; \frac{\sqrt{113}-25}{8})$; б) $[16-2\sqrt{61}; 1) \cup [16+2\sqrt{61}; +\infty)$; в) $[-4; \frac{1-\sqrt{1431}}{10}] \cup (0; 4]$; г) $[-1,2; \frac{13-\sqrt{489}}{32}] \cup (0; +\infty)$; д) $[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0) \cup [0; \frac{\sqrt{3}}{2}]$; е) $(\frac{12}{25}; \frac{1}{2})$. 707. а) $[-4; 1] \cup \{2\}$; б) $\{-4\} \cup [2; 3]$; в) $[-3; 1] \cup [2; \sqrt{13}]$; г) $(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$; д) $(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}) \cup (2; +\infty)$; е) $(-\infty; -\frac{7}{18})$. 708. а) $(\frac{3-\sqrt{21}}{2}; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $[\frac{1}{2}; 2) \cup (5; +\infty)$; в) $[-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$; г) $\frac{1}{2}$. 709. а) $[-3; 1]$; б) $[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup (\frac{\sqrt{3}}{2}; 1]$; в) $[\frac{16+\sqrt{7}}{2}; 10]$; г) нет решений; д) $(1; +\infty)$; е) $(-\infty; -\frac{9+\sqrt{61}}{8})$. 710. а) $[0; \frac{1}{3}]$; б) $[-1; 1]$; в) $[0; 5]$; г) $(-\infty; -2] \cup [-1; \frac{1-\sqrt{10}}{6}]$. 711. а) $[-2; +\infty)$; б) $(\frac{2}{3}\sqrt{21}; +\infty)$; в) $[6\frac{1}{3}; 9)$; г) $[1; 1,5]$; д) $[5; \frac{10+2\sqrt{7}}{3}]$; е) $[-3; -4]$. 712. а) $[2,5; 3]$; б) $(5; 9)$; в) нет решений; г) $(3; 11)$. 713. а) $[\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}]$; б) $[0,2; +\infty)$; в) $(-\infty; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}; +\infty)$; г) $(-\infty; \infty)$; д) $[0; +\infty)$; е) $(1; 2]$; ж) $[2; +\infty)$; з) нет решений.

Раздел V

764. б) $[-2; 8]$; в) $[1; +\infty)$. 767. 15 т. 768. 9 кг. 769. 7 дней, 12 дней. 770. 2 ч 30 мин, 2 ч 40 мин. 771. 25 м, 76 м. 776. ≈ 57 м. 781. а) пс; б) $\frac{\pi a}{\sin \alpha}$; в) $\frac{\pi a}{\sin \frac{\beta}{2}}$; г) $\frac{\pi d}{\sin \gamma}$. 782. а) $\frac{b(\sin \delta + \cos \delta - 1)}{2 \sin \delta}$; б) $\frac{h \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi - 1}$; в) $\frac{cd}{2\sqrt{c^2+d^2}}$; г) $\frac{c}{2}$. 786. $\frac{r_1}{r_1}n$. 787. $\frac{r_1}{r_3}n$. 793. $\sqrt{1+(\frac{H}{R})^2}$. 794. $60^\circ, 300^\circ$. 795. $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2}(\frac{l}{r})^2$. 796. $\frac{180^\circ}{\pi}$. 797. а) $R\sqrt{3}$; б) R ; в) $2R \sin 80^\circ$. 798. а) $\frac{8\pi r}{3}$; б) $4\pi r$; в) $\frac{10\pi}{3}$. 799. $\frac{4\pi a}{3}$. 800. $180^\circ - \omega, 180^\circ + \omega$. 801. $\frac{24\pi l}{11}$. 807. $\approx 4,5^\circ$. 813. $4:3$. 814. 30. 815. $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{l}{2R}$. 818. а) $\frac{R}{3}(3-\sqrt{3})$;

б) $R(\sqrt{2}-1)$; в) $\frac{R}{3}$. 819. а) $R(3+2\sqrt{2})$; б) $R(3+2\sqrt{2})$; в) R . 820. а) $(-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup (\frac{2}{3}; 1)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (-3; -2,5) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. 821. а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 824. 135. 825. 120 км. 826. В 2,5 раза. 827. 11 ч 40 мин. 838. а) 12π ; б) $\frac{\pi a^2}{4 \cos^2 \alpha}$; в) $\frac{\pi c^4}{4h^2}$; г) $\frac{700\pi}{3}$; д) $\frac{25\pi}{\sin^2(\beta+\gamma)}$. 839. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi c^2}{4}(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)^2$; в) $\frac{\pi a^2(a^2-h^2)}{(a+\sqrt{a^2+h^2})^2}$; г) 525π ; д) $400\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}$. 843. 0,19. 850. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; в) $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$. 852. πkl . 857. $a^2(1-\frac{\pi}{4})$. 858. $\frac{R^2}{2}(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin \alpha)$, $\frac{R^2}{2}(2+\sin \alpha-\frac{\pi\alpha}{180})$. 859. $\frac{1}{6}+\frac{1}{2\pi}$. 862. а) $\frac{\pi+1}{\pi-1} \cdot 2p$; г) $\frac{\pi-2}{2\pi} \cdot p$. 864. $\approx 10,5^\circ$. 866. $\frac{13\pi}{6}+\sqrt{3}$. 867. $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$. 868. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{2 \cos 36^\circ}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 870. $6(\sqrt{3}-1)-\pi$. 872. а) $(-\infty; -1) \cup (0; 3)$; б) $(-2; 0) \cup (6; +\infty)$; в) $(2-\sqrt{5}; 0) \cup (2+\sqrt{5}; +\infty)$; г) $(-\infty; 0] \cup (1; 4]$. 874. 20%. 875. 3,2 ч, 1,6 ч. 876. 3 см $\times$ 3 см $\times$ 80 см; 4 см $\times$ 4 см $\times$ 30 см. 877. 67 мм $\times$ 37 мм; 97 мм $\times$ 57 мм.

Раздел VI

927. а) (16; 11), (8; 5); б) $(\frac{5}{3}; 3)$. 928. а) (5; 0), (-5; 10); б) (2; 4), (-10; -20). 930. а) (5; 1), $(-\frac{5}{7}; -\frac{11}{29})$; б) $(\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2})$. 931. 77 и 91. 932. 150 и 225. 933. 4:1. 934. 35 г. 935. $\frac{2}{3}$ км. 958. а) -0,1; б) 1,02. 963. $3(n-m)$. 964. 100. 965. а) 21; -525; б) 12; 408. 966. а) -2; 4,25; б) 7; 5. 967. а) 2; 22; б) -10; 18. 968. а) -17; 61; б) 23; 58. 969. а) 8; 23; б) 12; 63. 970. а) 20 100; б) $n(n+1)$; в) n^2 ; г) 123 300. 971. а) 2485; б) 494 550; в) 6400; г) 7 071 071; д) 445 500; е) 339 769. 972. Через секунду. 974. 50 м/мин². 975. 203,5 см. 976. а) ≈ 4 с; б) ≈ 122 м. 977. 1275. 978. 590. 983. а) $-\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$; б) 5, 4. 987. 2440. 988. 2 и 3 или 8 и -3. 989. 5 и -5 или -5 и 5. 995. 4 ч; 5 ч. 996. 8 см; 14 см. 997. 2,4 кг, 1,6 кг. 998. 27, 36, 63. 1014. а) $a_1=1$, $q=-3$; б) $a_1=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$. 1029. 17; 10; 3 или 8; 10; 12.

1030. 18 м, 6 м, 2 м. 1031. а) 128; 7; б) 567; 5; в) 3; 384; г) 0,5; 5. 1040. а) 4; 10; 16 или 16; 10; 4; б) 3; 15; 75 или 75; 15; 3. 1045. а) 3; 2; б) -5; 2 или -5; -2. 1046. а) -3; -2; 10; б) 1; 2; 6. 1047. 40. 1048. 765. 1049. 2. 1050. 9; 6; 4; $2\frac{2}{3}$. 1051. $b_1=60$, 75; $q=\frac{2}{3}$. 1053. а) $b_1=1$, $q=3$ или $b_1=9$, $q=\frac{1}{38}$; б) $b_1=1$, $q=3$ или $b_1=9$, $q=\frac{1}{3}$. 1054. а) 27; 19; 11 или 12; 19; 26; б) 4; 8; 16 или 16; 8; 4; в) 2; 8; 32. 1055. 50, 75. 1056. 22,5 или 2,5. 1057. 10. 1058. 4. 1059. 6. 1060. $a_1=27$, $\alpha=-9$. 1065. 20 и 30. 1066. 12 ч, 8 ч. 1079. а) $2a$; б) $\frac{4}{3}a^2$; в) $\frac{8}{7}a^3$. 1086. $a_1=5$, $q=\frac{1}{5}$. 1101. 10 м, 32 м.

Раздел VII

1115. а) $-4x+8$; б) $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$; в) $2l^2-3kl+4jl-6jk$; г) $8fg+32fh-6g^2-20gh+16h^2$. 1131. а) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; б) (0; 3); в) $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (4; +\infty)$; г) $(-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$; д) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; е) (-6; 2); ж) $(-\infty; -1,5) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; з) (1,6; 2) $\cup$ (2; 8). 1156. а) 6,25; б) 1,5; в) 1; г) 1,1. 1189. 19 км. 1190. 9 или 10. 1191. 184 см³ или 181,8 см³. 1218. а) $(-\infty; -5] \cup [-2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup [-1; +\infty)$; г) $(-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$; д) (-1; 0); е) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; ж) [-2,5; -1] $\cup$ [-0,4; 1]; з) [0,6; 5]. 1221. а) (-4; 2), (0; 0); б) (3; -1), $(-\frac{1}{3}; 1)$; в) (-1; 4), (3; 0); г) (1; 1), $(-\frac{6}{17}; -\frac{12}{17})$. 1252. а) $(q+1)(h-1)$; б) $3(2s-1)(3c-4d)$; в) $(e+s)(3r-4d)$; г) $(5z-3p)(6z-7q)$; д) $(2m-3y) \times (5m-7g)$; е) $2(h-f)(4j^2+3f^2)$; ж) $(bm-ny)(bm^2-n^2y)$; з) $(1-s)(k^2-k+1)$. 1255. а) $\frac{7}{2q^2-q-3}$; б) $\frac{h+gj}{j+hg}$; в) $\frac{r}{e+r}$; г) 0; д) $\frac{1}{(f+d)(f+s)}$; е) 0. 1256. а) $\frac{b}{c}$; б) $\frac{1}{xy}$; в) $2a$; г) $\frac{a^2}{a^2-2a+2}$. 1258. а) 3; б) нет решений; в) 1; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; г) 80; -109. 1259. а) 2; $-1\frac{10}{27}$; б) -1; в) 0; г) -2; 1. 1265. а) $(-\infty; -1)$; б) [3; $+\infty$); в) нет решений; г) $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. 1293. а) $-2x$; б) 0; в) $\frac{4}{a(a+4)}$; г) 0. 1294. а) 0; б) $\frac{4(n-1)}{3n}$; в) $\frac{x}{x^2+1}$; г) $\frac{n-m}{1+mn}$. 1298. а) $\frac{m^{0,5}n^{0,5}}{n^{0,5}-m^{0,5}}$; б) 1; в) $\frac{2}{c-1}$; г) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$. 1300. а) 2; б) 15. 1301. а) $\frac{1}{3}$; б) [1; $+\infty$); в) 0; 1; г) -3; -4; д) 0; -1; -3; -4; е) $[-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}]$.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Сочетание окружности с углом, прямой, многоугольником

1. Окружность и угол	5
2. Окружность и прямая	17
3. Окружность и треугольник	26
4*. Окружность и четырехугольник	40

Раздел II. Неравенства

5. Квадратные неравенства	52
6. Рациональные неравенства	66
7*. Квадратные неравенства с параметрами	79

Раздел III. Соотношения между сторонами и углами треугольника

8. Свойства треугольника	91
9. Площади треугольника и четырехугольника	102
10*. Координатный метод	120

Раздел IV. Радикалы

11. Корень из числа	139
12. Свойства арифметического корня	150
13. Степень с рациональным показателем	160
14. Иррациональные выражения	171
15*. Степенная функция с рациональным показателем	184
16*. Иррациональные уравнения	208
17*. Иррациональные неравенства	222

Раздел V. Правильный многоугольник и окружность

18. Правильные многоугольники	235
19. Длина окружности	248
20. Площадь круга	263

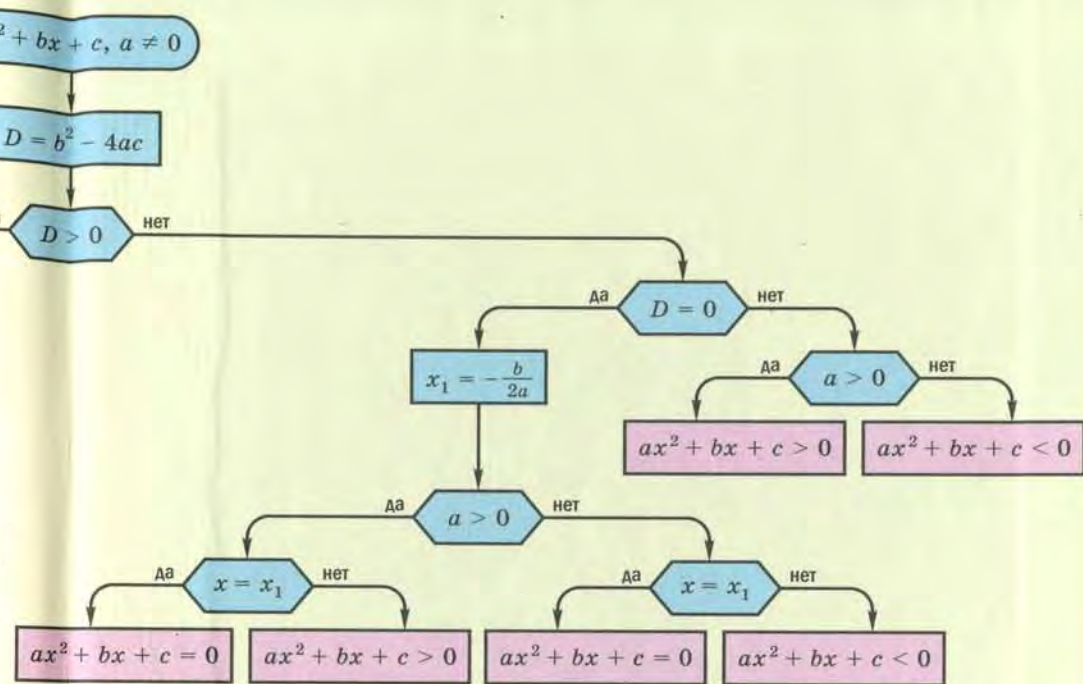
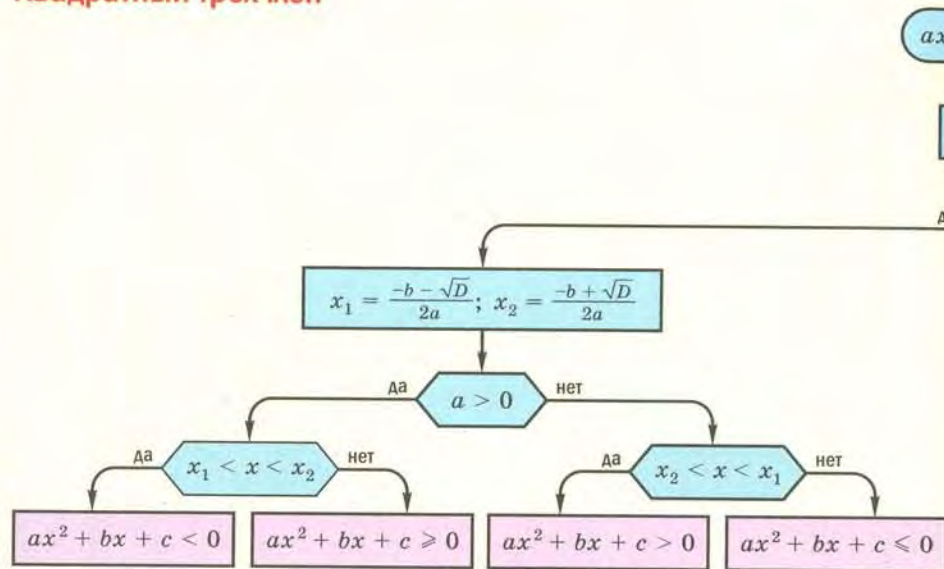
Раздел VI. Последовательности

21. Числовая последовательность	273
22. Арифметическая прогрессия	287
23. Геометрическая прогрессия	300
24. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	314

Раздел VII. Логические основы математики

25*. Аксиоматический метод	326
26*. Логические основы арифметики	341
27*. Логические основы алгебры	356
28*. Логические основы геометрии	369
29*. Геометрия Лобачевского	381
Справочный материал	393
Ответы	404

Квадратный трехчлен



Последовательность

Последовательность — функция натурального аргумента

Обозначение члена	a_1	a_2	a_3	...	a_n	...
Значение члена	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{n+1}$	...
Название члена	первый	второй	третий	...	n -й	...

Способы задания

Описанием	Записанные по возрастанию произведения n первых натуральных чисел					
Таблицей	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6 ...
	1	2	6	24	120	720 ...
Формулой n -го члена	$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$					
Рекурсией	$a_1 = 1; a_n = a_{n-1} \cdot n$					

Арифметическая прогрессия

$a_1 = c; a_n = a_{n-1} + d$
(c — значение первого члена,
 d — разность прогрессии)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d;$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

$b_1 = p; b_n = b_{n-1} \cdot q$
(p — значение первого члена,
 q — знаменатель прогрессии)

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1};$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($|q| < 1$)

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Степень с рациональным показателем

Корень из числа



$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число;} \\ |a|, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число.} \end{cases}$$

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то: Если $a \geq 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\sqrt[n]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m};$$

$$a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Если n — нечетное натуральное число, то

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

$$a^0 = 1 \text{ при } a \neq 0;$$

$$a^1 = a;$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ при } n \neq 1, n \text{ — натуральное число.}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \begin{cases} \text{при любом } a, \\ \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число;} \\ \text{при } a > 0, \\ \text{если } n \text{ — четное и } m \text{ — нечетное натуральное числа.} \end{cases}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \text{ при } a \neq 0, \text{ если } r \text{ — рациональное число.}$$